cálculo II
integral

teoría 560 problemas resueltos
485 ejercicios propuestos

álvaro pinzón



colección harper

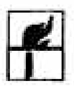
cálculo II - integral

colección harper

cálculo II
integral

teoría
560 problemas resueltos
485 ejercicios propuestos

álvaro pinzón
Matemático de la Universidad Nacional de Colombia
Miembro de la Mathematical Society of America
y de la Mathematical Association of America



HARLA, S. A. de C. V.
Harper & Row Latinoamericana

México, Buenos Aires, Panamá, Bogotá

CALCULO II (INTEGRAL)
Primera edición

Standard Book Number 06-316989-3

Dirección editorial: *Wenceslao Ortega*
Preparación técnica: *José Martínez Alaminos*
Cubierta e ilustraciones: *Secos Lanchas*

Cuidado y dirección técnica de HEROES, S. A. Editor.—Torrelara, 8.—Madrid-16

Printed in Spain—Impreso en España

I.S.B.N. 84-399-0514-9

Depósito legal: M. 5.131-1973

HEROES, S. A.-Torrelara, 8.-Madrid-16

Contenido

Prólogo

Desde el punto de vista de las aplicaciones de la matemática, puede decirse que los métodos tradicionalmente agrupados bajo los nombres de cálculo diferencial y de cálculo integral tienen por objeto resolver los problemas del cambio y del movimiento. En efecto, el cálculo diferencial se propone hallar la razón de variación entre dos magnitudes variables dependientes una de otra, y no ya en el caso de variaciones finitas solamente, sino también cuando dicha variación es instantánea. Así, el averiguar la rapidez con que se desplaza un cuerpo bajo la acción de la gravedad plantea problemas de velocidades medias límite, cuya determinación compete precisamente a los métodos diferenciales. Y al contrario, si se conoce el comportamiento instantáneo de una magnitud variable, es asunto de los métodos de integración el encontrar la marcha global de las magnitudes que intervienen en el fenómeno. Así, la determinación de la trayectoria de un cuerpo del que se conocen, por ejemplo, las coordenadas instantáneas, es cuestión que concierne al cálculo integral.

Sobra decir que el cálculo diferencial, y con más veras el cálculo integral, son dominios de la matemática de indudable refinamiento y que a veces plantean dificultades de cierta delicadeza en cuanto a su tratamiento. Por otra parte, el amplio uso que hacen la ciencia y la técnica modernas de estos métodos de cálculo, como lenguaje indispensable para expresar las leyes físicas con esquemas matemáticos adecuados, hace ineludible para todo estudiante de ciencias, de ingeniería, de economía, etc., la adquisición segura de dichos métodos, puesto que han de ser el instrumento de labor permanente y puesto que el dominarlos sin vacilaciones es condición primaria del trabajo científico eficaz y serio.

Precisamente, la colección de problemas resueltos detalladamente que constituyen esta obra ha sido concebida con el objeto de llevar al estudiante a una asimilación más rápida y segura de tales métodos de lo que suele ser posible con los textos corrientes; no se trata, por cierto, de una sarta de problemas de adiestramiento mecánico, sino de unas bases teóricas sólidas y suficientes que tienen como corolario una serie cuidadosamente graduada en dificultad de ejercicios que aplican en seguida la teoría expuesta. Y la resolución detallada tiene precisamente por objetivo acostumbrar al que aprende a trabajar correctamente, dando todos los pasos indispensables y fundamentando todas sus operaciones en la teoría que se acaba de exponer o que ya ha sido expuesta en capítulos anteriores. Así, etapa por etapa, el estudiante es conducido por mano firme hasta el momento en que, sin siquiera percatarse, ya sabe hacer los problemas solo, ya ha aprendido. Es el momento en que puede decirse plenamente que la técnica de cálculo particular que se estudiaba ha sido asimilada a la perfección.

También se han tenido en cuenta aquí las diversas posibilidades en cuanto a niveles de estudiantes que puedan aprovechar esta obra, y por ello es factible emplear el libro a cualquier nivel eligiendo problemas de tipo más «intuitivo» o más «formal», según se prefiera de acuerdo con el interés particular de aprendizaje.

En cuanto al orden de disposición, cada capítulo desarrolla, pues, en su serie de problemas, ordenados por dificultad creciente, una noción específica a la cual se refieren las definiciones, principios y teoremas que aparecen en los preliminares del capítulo, y es por ello aconsejable atenerse escrupulosamente al orden de exposición que se da y trabajar los problemas de acuerdo con su numeración correlativa. Al final aparece un formulario de geometría analítica y una relación de 381 integrales numeradas.

Tras un atento estudio de la teoría que abre cada capítulo, recuérdese que, como proceso de asimilación más indicado, se ha de tratar de resolver por propia cuenta los más posibles de

los problemas y comparar después los resultados obtenidos con los que aparecen en el libro; y en ocasiones será muy provechoso revisar previamente los «trucos» lógicos, por así llamarlos, que permiten muchas veces emprender la resolución de un problema de aquellos que constituyen el «dolor de cabeza» de todo principiante. En suma, la colección de problemas que aquí se presenta obedece a la clara convicción de que todo curso de matemática tiene por columna vertebral el estudio y solución de ejercicios y problemas.

El autor desea manifestar su agradecimiento al profesor Jesús María Castaño por la revisión crítica de la obra y por sus valiosas sugerencias, así como a los señores Francisco Gutiérrez y Wenceslao Ortega, de Harper & Row Latinoamericana, por la colaboración y estímulo que en todo momento me brindaron.

A. PINZÓN

CAPITULO 1

Axioma de plenitud. Continuidad uniforme

El axioma de plenitud de los números reales es muy importante en algunas aplicaciones y permite distinguir los números racionales de los reales, puesto que los racionales no cumplen este axioma. Sin él no se puede demostrar la existencia de $\sqrt{2}$. También permite estudiar algunas propiedades de las funciones continuas.

Mayorantes, minorantes, extremos de un conjunto

Definición. 1. Un número real M es el máximo de un conjunto S de números reales si, y solo si, $M \in S$ y $x \leq M$, para todo $x \in S$. Se escribe $M = \max S$. 2. Un número real m es el mínimo de un conjunto S de números reales si, y solo si, $m \in S$ y $m \leq x$, para todo $x \in S$. Se escribe $m = \min S$. Algunos conjuntos tienen mínimo y máximo; otros uno de los dos o ninguno. Por ejemplo:

a) $a = \min [a, b] = \min [a, b[$.
b) $b = \max [a, b] = \max]a, b]$.
c) $]a, b[$ no tiene mínimo.
d) $]a, b[$ no tiene máximo.
e) $]a, b[$ no tiene ni máximo ni mínimo.

Definición. 1. El número real u es un mayorante (o cota superior) de un conjunto S de números reales; equivale a que $x \leq u$, para todo $x \in S$ (es decir, $x \in S$ implica $x \leq u$). 2. El número real l es un minorante (o cota inferior) de un conjunto S de números reales; equivale a decir que $l \leq x$, para todo $x \in S$ (es decir, $x \in S$ implica que $l \leq x$).

Ejemplo 1-1. Si $S =]1, 2[$, cualquier número mayor o igual a 2 es mayorante y cualquier número menor o igual a 1 es minorante. $\mathbb{Z}$ no es mayorado ni minorado.

Un conjunto S de números reales se dice acotado si existe un número c tal que para todo $x \in S$, $|x| \leq c$.

Definición. 1. Un número real c es el extremo superior de un conjunto S de números reales si, y solo si, c es el mínimo de todos los mayorantes de S. En otras palabras,

$$c = \sup S = \min \{u : x \in S \text{ implica } x \leq u\} \Leftrightarrow \forall x \in S, x \leq c \text{ y } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in S \text{ tal que } x > c - \varepsilon$$

2. Un número real L es el extremo inferior de un conjunto S de números reales si, y solo si, L es el máximo del conjunto de todos los minorantes. En otras palabras,

$$L = \inf S = \max \{l : x \in S \text{ implica } l \leq x\}$$

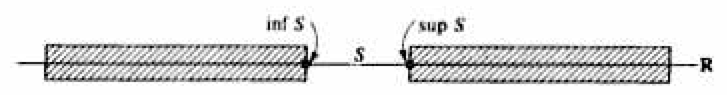


Figura 1-1

Ejemplo 1-2. Sup $]a, b[= b = \max\,]a, b]$; inf $]a, b[= a = \min\, [a, b[$; sup $]-\infty, 0[= 0 = \inf\,]0, -\infty[$. Puede suceder que algunos conjuntos no tengan ni máximo ni mínimo ni extremo superior ni inferior. Por ejemplo, el conjunto **R** de los números reales no tiene extremo superior ni inferior porque **R** no tiene mayorantes ni minorantes. A los conjuntos que carecen de mayorantes y minorantes se les llama *no acotados.*

El siguiente axioma, llamado de plenitud o continuidad, garantiza la idea intuitiva que se tiene de que si un conjunto es mayorado, entonces tiene un mayorante mínimo, es decir, el extremo superior del conjunto. En otras palabras, este axioma garantiza que el conjunto **R** de los números reales no tiene vacíos o cortaduras.

Axioma de plenitud o continuidad

Si S es un conjunto de números reales no vacío y si S es mayorado, entonces el extremo superior de S pertenece a **R**.

Los números racionales no poseen esta propiedad; por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 3\}$ no tiene un mayorante mínimo que sea racional, pero $\sqrt{3}$ es el número real que es el extremo superior del conjunto $\{x \in \mathbf{R} : x^2 < 3\}$.

El axioma de plenitud garantiza la existencia de números suficientes para poder efectuar con ellos todas las operaciones que se deseen.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1-1 Muestre que el conjunto de números reales $]a,b[$ no tiene mínimo.

Solución. Vamos a hacer la demostración por contradicción. Suponga que existe un número c tal que $c = \min\,]a, b[$. Por definición de mínimo, c satisface las dos condiciones: *a)* $c \in\,]a, b[$, es decir, $a < c < b$, y *b)* $c \leq x$ para todo $x \in\,]a, b[$. Observe que si la primera condición se cumple, la segunda no.

$(a + c)/2 \in\,]a, b[$ porque $a < c \Rightarrow a < (a + c)/2 < c$, y, por tanto, $(a + c)/2 < c$ contradice la condición de que $c \leq x$, $\forall x \in\,]a, b[$. Entonces c no es el mínimo de $]a, b[$. Los demás casos se demuestran en forma análoga.

Problema 1-2 Si S es un conjunto de números reales con un máximo, ese máximo es único.

Solución. Si $M_1 = \max S$ y $M_2 = \max S$, entonces como $M_1 \in S$ y $M_1 \leq M_2$ y como $M_2 \in S \Rightarrow M_2 \leq M_1$, por tanto, $M_1 = M_2$.

Problema 1-3 Muestre que cualquier conjunto finito S de números reales tiene un máximo.

Solución. *Demostración por recurrencia.* Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que todo conjunto de n números reales tenga un máximo.

a) $1 \in S$. Sea $T_1 = \{x : x \in \mathbf{R}\}$, max $T_1 = x$, porque $x \in T_1$ y $x \leq x$, $\forall x \in T_1$.

b) Suponga que $k \in S$. Sea $T_{k+1} = \{x_i : i = 1, 2, \ldots, k+1\}$. Sea $T_k = \{x_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$. Entonces $T_{k+1} = T_k \cup \{x_{k+1}\}$. T_k es un conjunto de k números reales y $k \in S$. Sea max $T_k = m$, además max $\{x_{k+1}\} = x_{k+1}$. Entonces, o bien $x_{k+1} < m$, o bien $x_{k+1} = m$, o bien $m < x_{k+1}$.

En los dos primeros casos se tiene que $x_i \leq m$ para $i = 1, 2, \ldots, k+1, \ldots$ Así max $T_{k+1} = m$.

En el tercer caso, $x_i \leq m$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ y $m < x_{k+1}$; $\therefore$ $x_i \leq x_{k+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, k+1$. En este caso, max $T_{k+1} = x_{k+1}$. Hemos mostrado que si $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$.

De *a)* y *b)* se concluye que $S =$ a los enteros positivos. Por tanto, un conjunto finito de números reales $\neq \phi$ tiene máximo.

Problema 1-4 Muestre que max $]a, +\infty[$ no existe.

Solución. Suponga que max $]a, +\infty[= c$. Entonces $c \in]a, +\infty[$ y $x \leq c$, para todos $x \in]a, +\infty[$. $c \in]a, +\infty[$ implica que $c > a$. Pero $c + 1 > c > a$, $\therefore$ $c + 1 > a$. Entonces $c + 1 \in]a, +\infty[$ y $c + 1 > c$, lo cual contradice a $x \leq c$ para todo $x \in]a, +\infty[$. Por tanto, $]a, +\infty[$ no tiene máximo.

Problema 1-5 Sea $S = \{2 + 1/n, n$ entero positivo$\}$, entonces max $S = 3$.

Solución. Hay que mostrar que: *a)* $3 \in S$, y *b)* $x \leq 3$, $\forall x \in S$.

a) Para $n = 1$, $2 + 1/n = 2 + 1/1 = 3$, entonces $3 \in S$.

b) Suponga que $x \in S$. Entonces, para algún entero positivo n_1, $x = 2 + 1/n_1$. Como n_1 es un entero positivo, $n_1 \geq 1$, entonces $1/n_1 \leq 1$, lo cual implica que $2 + 1/n_1 \leq 2 + 1 \Rightarrow x = 2 + 1/n_1 \leq 3$. Entonces, para todo $x \in S$, $x \leq 3$.

De *a)* y *b)* se concluye que $3 \in S$, y para todo $x \in S$, $x \leq 3$. $\therefore$ $3 = \max S$.

Problema 1-6 Muestre que el conjunto $S = \{1 - 1/n : n \in \mathbf{Z}^+$ no tiene máximo$\}$.

Solución. *Demostración por contradicción.* *a)* Suponga que $N = \max S \Rightarrow N \in S$ y $x \leq N$, $\forall x \in S$.

b) Si $N \in S$, entonces, para algún entero positivo n_1, $N = 1 - 1/n_1$.

Se puede hallar un elemento de S mayor que N de la siguiente manera: como n_1 es entero positivo, entonces $n_1 + 1$ también lo es, y $1 - 1/(n_1 + 1) \in S$. Ahora $n_1 + 1 > n_1$ porque $1 > 0$ y $1/(n_1 + 1) < 1/n_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow -1/(n_1 + 1) > -1/n_1$. Además $1 - 1/(n_1 + 1) > 1 - 1/n_1 = N \Rightarrow 1 - 1/(n_1 + 1) > N$ y $1 - 1/(n_1 + 1) \in S$, contrario al hecho de que $1 - 1/(n_1 + 1) \in S$.

Problema 1-7 Si max $S = s$ y $c \geq 0$ y $cs = \{cx : x \in S\}$, entonces max $cS = cs$.

Solución. max $S = s$ equivale a que $s \in S$ y $x \leq s$, $\forall x \in S$; $s \in S$ implica que $cs \in cS$. Ahora, $z \in cS \Rightarrow$ $\Rightarrow z = cx$ para algún $x \in S$, pero $x \leq s$ y $c \geq 0 \Rightarrow cx \leq cs$, es decir, $z \leq cs$, $\forall z \in cS$.

De lo anterior tenemos que $cs \in cS$ y $z \leq cs$, $\forall z \in cS$. $\therefore$ max $cS = cs$.

Problema 1-8 Sean T y S conjuntos de números reales con max $S = s$ y max $T = t$. Defina $S + T = \{x + y : x \in S$ y $y \in T\}$, entonces max $(S + T) = s + t$.

Solución. *a)* max $S = s$ y max $T = t$, entonces $s \in S$ y $t \in T$ y $x \leq s$, $\forall x \in S$ y $x \leq t$, $\forall t \in T$.

b) $s \in S$ y $t \in T \Rightarrow (s + t) \in (S + T)$.

c) Suponga que $z \in (S + T) \Rightarrow z = x + y$. Pero $x \leq s$ y $y \leq t$, por tanto, $x + y \leq s + t$, es decir, $z \leq s + t$, $\forall z \in (S + T)$.

d) De *b*) y *c*) se tiene que $s + t \in (S + T)$ y $z \leq s + t$, $\forall z \in (S + T)$, $\therefore$ $\max (S + T) = s + t$.

Problema 1-9 Si S y T son conjuntos de reales, tales que $\max S = s$ y $\max T = t$, ¿tienen: *a*) $S \cap T$, *b*) $S \cup T$, necesariamente un máximo? Si es así, ¿cuál es? Si no, dé un contraejemplo.

Solución. *a*) No. Sea $S = [0, 1]$ y $T =]0, 1[\cup \{6\} \Rightarrow \max S = 1$, $\max T = 6$, $S \cap T =]0, 1[$ que no tiene máximo.

b) 1. Sea $c = \max \{s, t\} \Rightarrow c \in \{s, t\}$; por tanto, $c = s$ y $c \in S$ o $c = t$ y $c \in T$.

2. Si $c \in S \Rightarrow c \in S \cup T$ y si $c \in T$, entonces $c \in S \cup T$; por tanto, en cualquier caso, $c \in S \cup T$.

3. Sea $s \in S \cup T$; $x \in S \cup T \Rightarrow x \in S$ o $x \in T$. $x \in S \Rightarrow x \leq s \leq c$ (porque $c = \max \{s, t\}$, $s \leq c$ y $t \leq c$), $x \in T \Rightarrow x \leq t \leq c$. Entonces $x \in S \cup T \Rightarrow x \leq c$.

4. De 2 y 3 se tiene que $c \in S \cup T$ y $x \leq c$, $\forall x \in S \cup T$, $\therefore$ $\max (S \cup T) = c$.

Problema 1-10 Desarrolle los problemas anteriores si en vez de máximo es mínimo.

Problema 1-11 Muestre que el extremo superior de un conjunto S es único.

Solución. Sea $u_1 = \sup S$ y $u_2 = \sup S$. *a*) Suponga que u_1 es el mínimo mayorante de S. Cualquier número menor que u_1 no es extremo superior de S; por tanto, $u_2 \not< u_1 \Rightarrow u_1 \leq u_2$.

b) Suponga que u_2 es el mayorante mínimo de S. Cualquier número menor que u_2 no es extremo superior de S; por tanto, $u_1 \not< u_2 \Rightarrow u_2 \leq u_1$.

De *a*) y *b*) se obtiene: $u_1 = u_2$.

Problema 1-12 Muestre que si u es un mayorante de S y $u \in S \Rightarrow u = \sup S$. Además que $u = \max S$.

Solución. *a*) u es extremo superior de $S \Rightarrow x \leq u$, $\forall x \in S$.

b) Si $c < u \Rightarrow \exists x \in S$ tal que $x > c$, es decir, $x = u \in S$ y $u > c$.

c) De *a*) y *b*) tenemos que $\sup S = u$.

d) $u \in S$ y $x \leq u$, $\forall x \in S$ implica que $\max S = u$.

Problema 1-13 Muestre que si $S = \{1 - 1/n,\ n \in \mathbf{Z}^+\}$, entonces $\sup S = 1$.

Solución. Se debe mostrar que: *a*) $x \leq 1$, $\forall x \in S$, y *b*) si $c < 1 \Rightarrow \exists x \in S$ tal que $x > c$.

Si $x \in S \Rightarrow x = 1 - 1/n_1$ para algún entero positivo n_1. Entonces $n_1 \geq 0 \Rightarrow 1/n_1 > 0 \Rightarrow -1/n_1 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 - 1/n_1 < 1$; por tanto, $1 - 1/n_1 = x \in S \Rightarrow x \leq 1$. Esto demuestra *a*).

Para mostrar *b*) se desea hallar un entero positivo n_1 tal que $1 - 1/n_1 > c$ con $c < 1$. Tome a n_1 como un entero positivo tal que $n_1 > 1/(1 - c)$ y $1/(1 - c) > 0 \Rightarrow 1/n_1 < 1 - c$ porque $c < 1 \Rightarrow 1 - c > 0$. Entonces $-1/n_1 > c - 1 \Rightarrow 1 - 1/n_1 > c$. Por tanto, $1 - 1/n_1 = x \in S$ y $x > c$.

Problema 1-14 Si $S = \left\{ \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n};\ n \in \mathbf{Z}^+ \right\}$, entonces $\sup S = \dfrac{1}{3}$.

Solución. De nuevo hay que mostrar que: *a*) $x \leq \dfrac{1}{3}$, $\forall x \in S$, y *b*) si $c < \dfrac{1}{3} \Rightarrow \exists x \in S$ tal que $x > c$.

a) Sea $x \in S$, $x \in S \Rightarrow, x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n_1}$ para algún entero positivo n_1. Como $\frac{1}{2n_1}$ es positivo, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2n_1} < \frac{1}{3} \Rightarrow \forall x \in S,\ x \leq \frac{1}{3}$.

b) Si $c < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2n_1}$ será mayor que c si $n_1 > \frac{3}{2(1-3c)} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2n_1} \in S$ y $\frac{1}{3} - \frac{1}{2n_1} > c$.

De *a)* y *b)* se concluye que $\sup S = \frac{1}{3}$.

Problema 1-15 Sea T un conjunto mayorado de números reales y $S \subset T$, $S \neq \phi$. Demuestre que: *a)* $\sup S$ existe; *b)* $\sup T$ existe; *c)* $\sup S \leq \sup T$.

Solución. *a)* $S \neq \phi$ por definición. Como T es mayorado, existe u con $x \leq u$, $\forall x \in T$. Pero $S \subseteq T$, por tanto, $x \in S \Rightarrow x \in T$. Entonces $x \leq u$, $\forall x \in S$. Como S es mayorado, por el axioma de plenitud S tiene extremo superior.

b) T es mayorado. Además $S \neq \phi \Rightarrow \exists x \in S$. Pero $S \subseteq T \Rightarrow x \in T \Rightarrow T \neq \phi$. Por el axioma de plenitud tiene extremo superior.

c) Sea $\sup S = s$ y $\sup T = t$. Suponga que $t < s$. Por definición de $\sup S$, si $t < s \Rightarrow \exists x \in S$ tal que $x > t$. Pero $x \in S \subseteq T \Rightarrow x \in T$. Así, se tiene que $x \in T$ con $x > t$. Lo cual constituye una contradicción porque $t = \sup T \Rightarrow x \leq t$, $\forall x \in T$. Entonces $s \leq t$.

Problema 1-16 Demuestre los problemas anteriores si en vez de extremo superior se tiene extremo inferior.

Problema 1-17 Sea S un conjunto acotado no vacío de números reales. Muestre que $\inf S \leq \sup S$.

Solución. Como $S \neq \phi$, entonces existe $x \in S$. $\inf S \leq x \leq \sup S$; por tanto, $\inf S \leq \sup S$.

Problema 1-18 Sean S y T dos conjuntos no vacíos de números reales tales que para cada $s \in S$ y cada $t \in T$, $s \leq t$. Muestre que: *a)* $\sup S$ existe. *b)* $\sup S \leq t, \forall t \in T$. *c)* $\inf T$ existe. *d)* $\sup S \leq \inf T$.

Solución. *a)* Sea $t \in T$. Por hipótesis, $s \leq t$, $\forall s \in S$. Entonces t es extremo superior de $S \Rightarrow S \neq \phi$ es mayorado. Así, $\sup S$ existe por el axioma de plenitud.

b) $\sup S \leq$ cualquier mayorante de S. Entonces $\sup S \leq t$. Como t es un elemento arbitrario en T, entonces $\sup S \leq t$, $\forall t \in T$.

c) Por *b)*, $\sup S$ es un minorante de T, lo cual implica que $T \neq \phi$ y es minorado. Por tanto, $\inf T$ existe.

d) Por *c)*, $\sup S$ es extremo inferior de $T \Rightarrow \sup S \leq \inf T$, puesto que el extremo inferior de cualquier conjunto es mayor o igual que cualquier minorante del conjunto.

Problema 1-19 Si S es un conjunto acotado y no vacío de números reales, e $\inf S = \sup S$, entonces S tiene solamente un elemento.

Solución. Sea $\inf S = k = \sup S$. Sea $x \in S$, entonces $\inf S = k \leq x$ y $x \leq k = \sup S$. Pero $x \geq k$ y $x \leq k$, entonces $x = k$. Entonces para todo $x \in S$, $x = k$.

Problema 1-20 Sean S y T dos conjuntos no vacíos de números reales mayorados. Pruebe que si $x \in S$ y $y \in T$ entonces $x + y \leq \sup S + \sup T$.

Solución. *a*) Como $S \neq \phi$ y $T \neq \phi$ y son mayorados, por el axioma de plenitud sup S, sup T existen. *b*) Por definición, $x \in S$ implica que $x \leq \sup S$ y $y \in T \Rightarrow y \leq \sup T$, entonces $x + y \leq \sup S + \sup T$.

Problema 1-21 Sean S y T subconjuntos de números reales no vacíos y cada uno con extremo superior, y sea $S + T = \{x + y : x \in S, y \in T\}$. Pruebe que: *a*) sup $(S + T)$ existe, y *b*) $\sup (S + T) = \sup S + \sup T$.

Solución. *a*) Por el problema anterior, $x + y \leq \sup S + \sup T$, $\forall (x + y) \in (S + T)$. Entonces $S + T$ es mayorado. Además, como $S \neq \phi$ y $t \neq \phi$, $S + T \neq \phi$. Entonces, según el axioma de plenitud, sup $(S + T)$ existe.

b) Sea $\sup S = s$, $\sup T = t$, $\sup (S + T) = u$. Por *a*) $u \leq s + t$. Suponga que $u < s + t$. Tome a $s + t - u = \varepsilon$, entonces $s - \frac{\varepsilon}{2} < s$ y $t - \frac{\varepsilon}{2} < t$; entonces existe $s_1 \in S$ con $s_1 > s - \frac{\varepsilon}{2}$ y $t_1 \in T$ con $t_1 > t - \frac{\varepsilon}{2}$.

Tenemos que $s_1 + t_1 > s + t - \varepsilon = u \Rightarrow s_1 + t_1 \in (S + T)$ y $s_1 + t_1 > u = \sup (S + T)$. Esto contradice el resultado de que $u = \sup (S + T)$. Así, $u = s + t$, es decir, $\sup (S + T) = \sup S + \sup T$.

Problema 1-22 Sean S, T y U subconjuntos de reales no vacíos, mayorados y tales que $\forall s \in S, t \in T, \exists u \in U$ tal que $s + t \leq u$. Entonces $\sup S + \sup T \leq \sup U$.

Solución. Sea $\sup S = s$, $\sup T = t$, $\sup U = u$. Suponga que $s + t > u$. Sea $(s + t) - u = \varepsilon$. Entonces $s - \frac{\varepsilon}{2} < s$ y $t - \frac{\varepsilon}{2} < t$. Por tanto, existe $s_1 \in S$ con $s_1 > s - \frac{\varepsilon}{2}$ y $t_1 \in T$ con $t_1 > t - \frac{\varepsilon}{2}$. De donde $s_1 + t_1 > s + t - \varepsilon = u$.

Por hipótesis, existe $u_1 \in U$ con $u_1 \geq s_1 + t_1$. Por tanto, se tendrá que $u_1 \in U$ y $u_1 \geq u$. Pero $u = \sup U$.

Problema 1-23 Sea S un conjunto de números reales, c una constante. Sea $S = \{cx : x \in S\}$. Muestre que para $c \geq 0$ sup S existe, y que $\sup cS = c \cdot \sup S$, y que si existe inf S, entonces $\inf cS = c \cdot \inf S$. Si $c < 0$ y si sup S existe, entonces $\inf cS = c \cdot \sup S$, y si inf S existe, entonces $\sup cS = c \inf S$.

Solución. Si $c = 0$, el resultado es obvio. Si $c > 0$, sea $b = \sup S$.

a) Sea $z \in cS$; entonces $z = cx$, $x \in S$. $x \in S$ y $b = \sup S$ implican que $x \leq b$, y como $c > 0$, entonces $cx \leq cb$; por tanto, para todo $z \in cS$, $z = cx \leq cb$.

b) Sea $k < cb$. Entonces $k/c < b$. $k/c < b$ y $b = \sup S$ implican que existe $x \in S$ con $x > k/c$. Sea $cx = z$; entonces $cx \in cS$ y $cx > k$. Así, $\forall k < cb$, $\exists cx = z \in cS$ con $z > k$.

De *a*) y *b*) se tiene que $\sup cS = cb$, es decir, $\sup cS = c \sup S$.

Las demás demostraciones son análogas.

Problema 1-24 Sea **R** el conjunto de los números reales y x un real. Muestre que el conjunto $S = \mathbf{R} - \{x\}$ no es completo en el sentido de que existe un subconjunto no vacío de S mayorado por un elemento de S y que no tiene extremo superior en S.

Solución. Sea A el conjunto de todos los números reales menores que x. Entonces A no es vacío (puesto que $x - 1$ es un elemento de A) y A es mayorado en S ($x + 1$ es un elemento de S, que es mayorante de A). Para mostrar que A no tiene extremo superior en S, sea y un elemento de S que se supone el mínimo mayorante de A. Se presentan dos casos: si $x > y$, entonces $y < \frac{1}{2}(x + y) < x$ y y es menor que $\frac{1}{2}(x + y)$, elemento de A, y y no es un mayorante de A. Si $y > x$, entonces $y > \frac{1}{2}(x + y) > x$, y $\frac{1}{2}(x + y)$ es un mayorante de A menor que el supuesto, mínimo mayorante, lo cual es una contradicción.

Problema 1-25 Muestre que todo conjunto de números reales minorado tiene un minorante máximo.

Solución. Sea A un conjunto no vacío de reales y $B = -A = \{x: -x \in A\}$. B no es vacío, puesto que A no lo es. Si y es cualquier minorante de A, entonces $-y$ es un mayorante de B (la desigualdad $-y > x = -a$ es equivalente a la desigualdad $y < -x = a$). Sea $s = \sup B$ y definamos $t = -s$. Se quiere mostrar que t es el extremo inferior de A. En primer lugar, t es un minorante de A. En segundo lugar, si l es un minorante de A, entonces $-l$ es un mayorante de B y, por tanto, $-l \geq s = -t$, es decir, $l \leq t$. Entonces A tiene un extremo inferior.

Problema 1-26 Muestre que el conjunto de todos los minorantes de un conjunto no vacío A de números reales es vacío o un intervalo de la forma $]-\infty, c]$.

Solución. Sea B el conjunto de todos los minorantes de A y suponga que B no es vacío. Si c es el extremo inferior de A, se quiere mostrar que $B =]-\infty, c]$. En primer lugar, todo elemento de B es un minorante de A y, por tanto, menor o igual a c; por tanto, $B \subset]-\infty, c]$. En segundo lugar, todo elemento x de $]-\infty, c]$ verifica la desigualdad $x \leq c$ y, por tanto, es un minorante de A; $x \in B$, por tanto, $]-\infty, c] \subset B$.

Problema 1-27 (Propiedad arquimediana.) Si a y b son números reales positivos, existe un entero positivo n tal que $b < na$.

Solución. *Demostración indirecta.* Suponga que para todos los enteros positivos n, $b > na$. Sea $S = \{na: n$ es un entero positivo$\}$. Según la definición, S es mayorado (b es un mayorante). Entonces, por el axioma de plenitud, S tiene un mayorante mínimo, digamos c. Como $c - a < c$, $c - a$ no puede ser un mayorante de S y, por tanto, existe un elemento de S, digamos n_0a, tal que $n_0a > c - a$. Entonces $(n_0 + 1)a > c$. Pero $(n_0 + 1) \cdot a \in S$. Esto contradice el hecho de que c es el mayorante mínimo de S. Por tanto, la hipótesis de que para todo n, $b \geq na$, no es verdadera. Así, existe un n tal que $b < na$.

Problema 1-28 Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n tal que $1/n < \varepsilon$.

Solución. Sea $a = \varepsilon$ y $b = 1$, en el problema anterior.

Problema 1-29 Para cualquier número real b existe un entero m tal que $m - 1 \leq$ $\leq b < m$.

Solución. Vamos a mostrar que existen enteros p y q tales que $p < b < q$. Si $b > 0$, entonces, haciendo $a = 1$, en el Problema 1-27, existe un entero positivo q tal que $b < q$. Aplicando este resultado al número $-b$ se tiene que existe un entero positivo, que llamamos $-p$, tal que $-b < -p$. Por tanto, existen enteros p y q tales que $p < b < q$. Así parece que b está comprendido entre dos enteros consecutivos del conjunto $\{p, p+1, \ldots, p + (q - p) = q\}$. Para mostrar que esto es así sea S el conjunto de los enteros positivos n tales que $p + n > b$. $S \neq \phi$ porque $q - p \in S$ y, según el principio de la buena ordenación, S tiene un elemento mínimo, digamos n_0. Entonces, haciendo $m = p + n_0$, se tiene que $m - 1 \leq b < m$.

Problema 1-30 (Los números racionales son densos en los reales.) Si a y b son dos números reales tales que $a < b$, entonces existe un número racional r tal que $a < r < b$.

Solución. Por el Problema 1-28 existe un número entero positivo n tal que $1/n < b - a$. Ahora, como la distancia entre dos racionales sucesivos de la forma m/n es $1/n < b - a$, parece que un número racional de esta forma está comprendido entre a y b. Por el Problema 1-29 sabemos que existe un entero m tal que

$m - 1 \leq an < m$, es decir, $(m - 1)/n \leq a < m/n$. Así, $a < m/n$, y como $m/n - 1/n \leq a$, $m/n \leq a + 1/n < b$. Por consiguiente, el número racional $r = m/n$ está comprendido entre a y b.

Problema 1-31 Muestre que el conjunto S de todos los números racionales positivos cuyos cuadrados son menores que 2 es mayorado, pero no tiene mayorante mínimo en el conjunto de los números racionales.

Solución. S es mayorado, 2 es un mayorante de S. Según el axioma de plenitud, S tiene un, y solo un, extremo superior c en los reales. Vamos a ver que $c^2 = 2$, y como ningún racional tiene por cuadrado a 2, S no tiene extremo superior en el conjunto de los racionales. Vamos a establecer que $c^2 = 2$ mostrando que $c^2 < 2$ y $c^2 > 2$ producen contradicciones.

Si $c = \sup S$, entonces c debe ser positivo.

Caso 1. Si $c^2 < 2$ se puede mostrar que existe un racional $r \in S$ (es decir, $r^2 < 2$) tal que $r > c$. Esto contradice la hipótesis de que c es el extremo superior de S. Ahora, si $c^2 < 2$, entonces $c^2 < 4$ y, por tanto, $c < 2$. También para $n \geq 2$, $0 < \dfrac{2 - c^2}{n} < \dfrac{2}{n} \leq 1$.

Sea $b = c + \dfrac{2 - c^2}{n}$ (n entero positivo); entonces b es un número real mayor que c. Eligiendo adecuadamente a n se obtiene que $b^2 < 2$.

$$b^2 = c^2 + 2c\,\frac{2-c^2}{n} + \left(\frac{2-c^2}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{2-c^2}{n}\left(2c + \frac{2-c^2}{n}\right) < c^2 + \frac{(2-c^2)}{n}5 \quad , \quad \text{para } n \geq 2$$

$$\leq c^2 + (2 - c^2) = 2 \quad , \quad \text{para } n \geq 5$$

Así, $b = c + \dfrac{2 - c^2}{5}$ es un número real mayor que c tal que $b^2 < 2$.

Por el problema anterior existe un racional r tal que $c < r < b$. Entonces $r^2 < 2$ y $r \in S$. Esto contradice el hecho de que $c = \sup S$ y, por tanto, $c^2 < 2$ no se verifica.

Caso 2. Si $c^2 > 2$, entonces se puede mostrar que existe un número real b que es menor que c y que es un mayorante de S. Esto contradice la hipótesis de que c es el sup S. Si $c^2 > 2$, entonces $c^2 + 2 < c^2 + c^2 = 2c^2$ y, por tanto, $\dfrac{c^2 + 2}{2c} < c$. Haciendo $b = \dfrac{c^2 + 2}{2c}$ se tiene que $0 < b < c$. También $b^2 - 2 = \dfrac{c^4 + 4c^2 + 4}{4c^2} - 2 = \dfrac{c^4 - 4c^2 + 4}{4c^2} = \left(\dfrac{c^2 - 2}{2c}\right)^2 > 0$.

Entonces $b^2 > 2$ y b es un mayorante de S menor que c. Esto contradice el resultado de que $c = \sup S$ y muestra que $c^2 > 2$ no se verifica. Por tanto, $c^2 = 2$ y S no tiene extremo superior en el conjunto de los números racionales.

Problema 1-32 Muestre que si S es un conjunto denso en un intervalo I, y si a y b son dos elementos de I con $a < b$, entonces existe una infinidad de elementos de S entre a y b.

Solución. Por definición, un conjunto S de reales es denso en un intervalo I si, y solo si, entre dos puntos de I hay un elemento de S. Por definición, el conjunto A de todos los elementos entre a y b no es vacío. Suponga que es finito. Entonces A tiene un elemento máximo s; por tanto, todo elemento x de $A: a < x \leq s < b$. Como S es denso en I, existe un elemento $x \in S$ entre s y b y, por tanto, un elemento $x \in A$ entre s y b, en contradicción a la desigualdad $x \leq s$, que se verifica para todos los elementos $x \in A$.

Problema 1-33 Muestre que el número $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Solución. Suponga que $\sqrt{2} = p/q$, p y q enteros, irreducible. Si existen los enteros p y q, entonces existen enteros m y n tales que ambos son positivos y uno de los dos no es par. De $m/n = \sqrt{2}$ se deduce, al elevar al cuadrado, que $m^2 = 2n^2$ y, por tanto, m es par. Haciendo $m = 2k$, k un entero positivo, se deduce que $4k^2 = 2n^2$ o $2k^2 = n^2$, es decir, que n es par. Esto contradice la hipótesis de que m y n son ambos pares. Es decir, $\sqrt{2}$ no se puede expresar en la forma $\sqrt{2} = p/q$.

Problema 1-34 Si r es un número racional, s un número racional distinto de cero, y si x es irracional, entonces los siguientes números son todos irracionales: $x + r$, $x - r$, $r - x$, xs, x/s, s/x.

Solución. Cada parte de la demostración se hace por contradicción y hace uso del hecho de que los números racionales son un cuerpo. Vamos a dar dos casos de la demostración, los demás se dejan al lector. Suponga que $x + r$ es un número racional t: $x + r = t$. Entonces $x = t - r$, que es racional (contradicción). Suponga que s/x es un número racional t: $s/x = t$. Entonces $t \neq 0$ y $x = xs/t$, que es un número racional (contradicción).

Problema 1-35 El conjunto S de los números irracionales es denso en $\mathbf{R}$.

Solución. Sean x y y, dos números reales distintos, con $x < y$. Entonces $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$ y existe un número racional r tal que $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$.

Como $\sqrt{2} + r$ es irracional por el problema anterior, se ha mostrado que entre dos números reales distintos hay un elemento de S. Es decir, S es denso en $\mathbf{R}$.

Problema 1-36 Se dice que un número x es casi mayorante de S si existe un número finito de números y en S con $y \geq x$. Análogamente se define casi minorante.

Halle los casi mayorantes y casi minorantes de los siguientes conjuntos (según la definición dada): *a*) $\{1/n : n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$; *b*) $\{x : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, x \text{ racional}\}$; *c*) $\{x : x^2 + x - 1 < 0\}$.

Solución.

Casi mayorante:	Casi minorante:
a) todo $\alpha > 0$,	*a*) todo $\alpha < 0$,
b) todo $\alpha \geq \sqrt{2}$,	*b*) todo $\alpha \leq 0$,
c) todo $\alpha \geq 0$.	*c*) todo $\alpha \leq [-1 + \sqrt{5}]/2$.

Problema 1-37 Si S es un conjunto infinito y acotado, muestre que el conjunto B de los casi mayorantes de S no es vacío y es minorado.

Si B existe, este número se llama límite superior de S, y se escribe $\overline{\lim}\, S$ o lim sup S.

Análogamente se define $\underline{\lim}\, S$. Halle $\overline{\lim}\, S$ y $\underline{\lim}\, S$ para los conjuntos del problema anterior.

Solución. 1. Todo mayorante de S es casi mayorante; por tanto, $B \neq \phi$. Ningún minorante de S puede ser un casi minorante (porque S es infinito), puesto que B es acotado inferiormente por cualquier minorante de S.

2. *a*) 0; *b*) $\sqrt{2}$; *c*) $\dfrac{(-1 + \sqrt{5})}{2}$, son los límites superiores.

Los límites inferiores son: *a*) 0; *b*) 0; *c*) $\dfrac{(-1 + \sqrt{5})}{2}$.

Problema 1-38 Si S es un conjunto infinito y acotado, muestre que: *a*) $\underline{\lim}\, S \leq \overline{\lim}\, S$; *b*) $\overline{\lim}\, S \leq \sup S$; *c*) si $\overline{\lim}\, S < \sup S$, entonces S contiene un elemento máximo.

Solución. *a*) Si x es un casi minorante de S y y un casi mayorante, entonces hay infinidad de números en S que son menores que x o mayores que y. Como S es infinito, entonces se debe tener que $x \leq y$. Así $\underline{\lim}\, S \leq \overline{\lim}\, S$.

b) Es evidente que $\overline{\lim}\, S \leq \alpha$ para un casi mayorante α, y $\alpha = \sup S$ es un casi mayorante.

c) Si $\overline{\lim}\, S < \sup S$ existe un casi mayorante x de S con $x < \sup S$. Por tanto, hay infinidad de números de S que son mayores que x (y por lo menos uno, puesto que $x < \sup S$). El mayor de esta infinidad de elementos es el elemento máximo de S.

Problema 1-39 (Teorema del valor intermedio.) Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(a) < f(b)$ y si t es cualquier número tal que $f(a) < t < f(b)$, entonces existe un punto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = t$.

Solución. Sea S el conjunto de puntos $x \in [a, b]$ tales que $f(x) < t$. S no es vacío porque $a \in S$ y es mayorado (b es un mayorante). Entonces, por el axioma de plenitud, S tiene un mayorante mínimo, digamos c. Como $a \in S$ y b es un mayorante de S, es evidente que $c \in [a, b]$. Vamos a mostrar que $f(c) = t$ probando que la hipótesis $f(c) \neq t$ lleva a una contradicción. Entonces, si $f(c) = t$, c no puede ser ni a ni b; luego $c \in]a, b[$.

Caso 1. Si $f(c) < t$, entonces $c \in [a, b[$ y existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < t \text{ para todo } x \in]c - \delta, c + \delta[\cap [a, b]$$

Así hemos mostrado que existe un punto $x \in]c, b]$ tal que $f(x) < t$ y esto contradice el hecho de que $c = \sup S$.

Caso 2. Si $f(c) > t$, entonces $c \in]a, b]$ y existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > t \text{ para todo } x \in]c - \delta, c + \delta[\cap [a, b]$$

Así no hay punto de S que esté a una distancia δ de c y esto contradice el hecho de que $c = \sup S$. La hipótesis $f(c) \neq t$ nos llevó a una contradicción y, por tanto, concluimos que $f(c) = t$ y $c \in]a, b[$.

Problema 1-40 Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, entonces existe un número $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Solución. Es un caso especial del teorema anterior.

Problema 1-41 *a*) Si a es un número real positivo y n un entero positivo, entonces existe un, y solo un, número real b, positivo, tal que $b^n = a$. *b*) Halle $\sqrt{a}$, $a > 0$.

Solución. *a*) Sea p un entero tal que $a < p$; entonces $p \geq 1$ y se tiene que $0 < a < p \leq p^n$. La función x^n es continua sobre $[0, p]$ y $f(0) = 0 < a < p^n = f(p)$. Por tanto, según el teorema del valor intermedio (Problema 1-39), existe un número $b \in]0, p[$ tal que $f(b) = b^n = a$. Como x^n es creciente para x positivo, b es el único número.

Si n es impar, la existencia de la raíz n-ésima de cualquier número real negativo se demuestra de manera análoga.

b) La existencia de la raíz cuadrada de cualquier número positivo se demostró (Problema 1-31). Vamos a considerar un procedimiento decimal de aproximación para obtener la raíz cuadrada de un número positivo a. Considere la ecuación $x^2 - a = 0$.

Sea k_0 el mayor entero tal que $k_0^2 \leq a$. Entonces $k_0 \leq \sqrt{a} < k_0 + 1$. Sea k_1 el mayor entero entre 0 y 9, inclusive, tal que $(k_0 + k_1/10)^2 \leq a$. Entonces $k_0 + k_1/10 \leq \sqrt{a} < k_0 + (k_1 + 1)/10$.

Sea k_2 el mayor entero entre 0 y 9, inclusive, tal que $(k_0 + k_1/10 + k_2/10^2)^2 \leq a$.

Entonces $k_0 + k_1/10 + k_2/10^2 \leq \sqrt{a} < k_0 + k_1/10 + (k_2 + 1)/10^2$; continuando este procedimiento se puede obtener una aproximación decimal para $\sqrt{a}$ que sea tan aproximada como se desee. Vamos a ilustrar este procedimiento para hallar una aproximación decimal de $\sqrt{2}$ exacta hasta tres decimales. En este caso, $k_0 = 1$. Se quiere determinar el mayor entero k entre 0 y 9 tal que

$$(1 + k_1/10)^2 \leq 2 \text{ o } \frac{k_1}{2}\left(2 + \frac{k_1}{10}\right) \leq 2 - 1 = 1,\ k_1(2 \cdot 10 + k_1) \leq 10^2$$

Así, $k_1 = 4$. Ahora se quiere determinar el mayor entero entre 0 y 9 tal que

$$\left(1 + \frac{4}{10} + \frac{k_2}{10^2}\right)^2 \leq 2 \text{ o } \frac{k_2}{10^2}\left(2 + 2 \cdot \frac{4}{10} + \frac{k_2}{10^2}\right) \leq 2 - 1 - \frac{8}{10} - \frac{16}{10^2} = \frac{4}{10^2} \text{ o}$$

$$k_2(2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + k_2) \leq 4 \cdot 10^2$$

Así, $k_2 = 1$. El siguiente esquema abrevia el procedimiento anterior:

```
              1,4  1  4  2
             √2,00 00 00 00
              1
       24 |  100
              96
      281 |    4 00
               2 81
     2824 |    1 19 00
               1 12 96
    28282 |       6 04 00
                  5 65 64
```

Entonces 1,1414 es una aproximación decimal de $\sqrt{2}$ exacta hasta tres decimales.

Problema 1-42 Un conjunto S de números reales es un intervalo si, y solamente si, tiene la propiedad de que para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 en S con $x_1 > x_2$, $]x_1, x_2[\subset S$.

Solución. Es fácil comprobar que cada uno de los tipos de intervalos tiene esta propiedad. Suponga que el conjunto S tiene esta propiedad. Si S es vacío o está formado por un solo punto es un intervalo. Suponga entonces que S tiene por lo menos dos puntos. Si S es acotado, sea $a = \inf S$ y $b = \sup S$. Vamos a mostrar que S es uno de los intervalos $]a, b[$, $[a, b[$ o $[a, b]$. Sea x tal que $a < x < b$. Como $a = \inf S$ y $b = \sup S$, existen puntos x_1 y x_2 en S tales que

$$a < x_1 < x < x_2 < b$$

Por consiguiente, $x \in S$ y

$$\begin{aligned} S &=]a, b[\text{ si } a \notin S,\ b \notin S \\ S &= [a, b[\text{ si } a \in S,\ b \notin S \\ S &=]a, b] \text{ si } a \notin S,\ b \in S \\ S &= [a, b] \text{ si } a \in S,\ b \in S \end{aligned}$$

Si S no es acotado, la demostración es análoga. Por ejemplo, suponga que S es minorado, pero no mayorado. Sea $a = \inf S$. Vamos a mostrar que S es $]a, +\infty[$ o $[a, +\infty[$. Tome $x > a$. Como $a = \inf S$ y S no es mayorado, existen puntos x_1 y x_2 en S tales que

$$a < x_1 < x < x_2$$

Por tanto, $x \in S$ y $S =]a, +\infty[$ si $a \notin S$ y $S = [a, +\infty[$ si $a \in S$.

Problema 1-43 Si I es un intervalo y f es continua sobre I, entonces tenemos que $f(I) = \{f(x)\colon x \in I\}$ es un intervalo.

Solución. Si $f(I)$ es vacío o contiene un solo punto, entonces es un intervalo. Suponga que $f(I)$ contiene por lo menos dos puntos. Tome a $f(x_1)$ y $f(x_2)$ en $f(I)$ con $f(x_1) < f(x_2)$. Si $t \in]f(x_1), f(x_2)[$, por el teorema del valor intermedio, existe un punto $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f(c) = t$. Por tanto, $t \in f(I)$. Según el problema anterior, $f(I)$ es un intervalo.

Por ejemplo, x^2 aplica el intervalo $]1, 3[$ sobre $]1, 9[$.

Problema 1-44 *Definición.* Una familia de intervalos se dice que recubre a un conjunto S si cada punto de S pertenece por lo menos a uno de los intervalos abiertos. *a*) Sea $S =]0, 1]$; muestre que la familia de intervalos $\{I_n\}$, con $I_n = \left]\frac{1}{n}, \frac{3}{2}\right[$ y $n = 1, 2, \ldots$, recubre a S.

b) Sea $S = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ con $n = 1, 2, \ldots$ Muestre que la familia de intervalos $I_n = \left]\frac{1}{n} - \delta, \frac{1}{n} + \delta\right[$ y δ un número positivo, recubre a S.

Solución. *a)* La familia $\{I_n\}$ recubre a $]0, 1]$. Para mostrar esto sea $c \in]0, 1]$. Por el Problema 1-28 sabemos que para algún n, $1/n < c$. Así, $c \in I_n$.

b) La familia $\{I_n\}$ recubre a S porque $1/n \in I_n$.

Nota. Observe que en la parte *a)* no se puede elegir un número finito de elementos de $\{I_n\}$ que recubran a $]0, 1]$. Por ejemplo, si se considera la familia finita de intervalos I_m de I_n e I_m con el índice máximo. Entonces cualquier punto del intervalo $]0, 1/m]$ no está en ningún intervalo de esta familia finita. Entonces una familia finita de intervalos abiertos de $\{I_n\}$ no recubre a S.

En la parte *b)* se puede elegir un número finito de intervalos abiertos de $\{I_n\}$ que recubra a S. Empleando la propiedad arquimediana de los números reales para algún entero positivo m, $1/m < \delta$. Entonces $\{I_n : n = 1, 2, \ldots, m\}$ es una familia finita que recubre a S, puesto que para $n > m$, $\frac{1}{m} - \delta < 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{m} + \delta$.

Problema 1-45 (Teorema de Heine-Borel.) Si el intervalo cerrado $[a, b] = I$ es recubierto por una familia de intervalos abiertos $\{I_n\}$, entonces un número finito de intervalos abiertos de la familia $\{I_n\}$ se puede elegir de tal manera que recubren a $[a, b]$.

Solución. Sea A el conjunto de todos los $x \in [a, b]$ tales que un número finito de intervalos abiertos de $\{I_n\}$ recubre a $[a, x]$. Como a pertenece a algún intervalo abierto de $\{I_n\}$, $[a, a]$ es recubierto por un número finito de intervalos (un intervalo) de $\{I_n\}$. Así, $a \in A$ y $A \neq \phi$. También I es mayorado (b es un mayorante de A). Entonces, por el axioma de plenitud, A tiene un mayorante mínimo c. El punto $c \in [a, b]$ y, por tanto, pertenece a algún intervalo I_c de $\{I_n\}$. Por el Problema 1-44, existe un punto $x_0 \in A$ tal que $x_0 \in I_c$. Como $x_0 \in A$, una familia finita de intervalos de $\{I_n\}$ recubre a $[a, x_0]$. Si agregamos a I_c esta familia finita de intervalos, se obtiene una familia finita de intervalos abiertos de $\{I_n\}$ que recubren a $[a, x_1]$ con $x_1 \in I_c$ y $x_1 > c$. Como $c = \sup A$, x_1 no puede estar en A y, por tanto, $x_1 \notin [a, b]$. Entonces, $x_1 > b$. Así tenemos que $[a, b] \subset [a, x_1]$ y $[a, x_1]$ es recubierto por una familia finita de intervalos de la familia $\{I_n\}$. Esto muestra que $[a, b]$ es recubierto por una familia finita de intervalos de $\{I_n\}$.

CONTINUIDAD UNIFORME

La función $f(x) = 2x$ es continua en $x_0 = 1$. Decir que la función es continua en x_0 equivale a decir que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo x para el cual $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Esta función es continua en $x_0 = 1$ porque para todo $\varepsilon > 0$ se puede tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, entonces para todo x que verifica la relación $|x - x_0| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(x_0)| = |2x - 2x_0| = 2|x - x_0| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Observe que para todo $\varepsilon > 0$ el δ que se empleó para $x_0 = 1$ se puede emplear para cualquier x_0. En efecto, para $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| = |2x - 2x_0| = 2|x - x_0| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Esto muestra que el δ que se necesita para la continuidad en x_0 depende únicamente de ε y es independiente del valor de x_0.

Ahora consideremos una función para la cual el δ de la continuidad en x_0 depende del valor de ε y de x_0. En otras palabras, para un ε dado no podremos hallar un δ que sirva para todo x_0.

Sea $f(x) = x^2$ y $x_0 = 1$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tomemos a $\delta = \frac{1}{2}$, entonces si $|x - 1| < \frac{1}{9}$ (y $|x + 1| < 3$) tenemos que $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - 1| = |x + 1||x - 1| < 3|x - 1| < 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3} = \varepsilon$.

Pero para $\varepsilon = \frac{1}{3}$ el δ que servía para $x_0 = 1$ no sirve para $x_0 = 3$, porque si se toma a $x = 3{,}1$, entonces $|x - x_0| = |3{,}1 - 3| < 0{,}1 < \frac{1}{9} = \delta$. Sin embargo, $|f(x) - f(x_0)| = |(3{,}1)^2 - 3^2| = 0{,}61 > \frac{1}{3} = \varepsilon$. (Vea Figs. 1-2 y 1-3.)

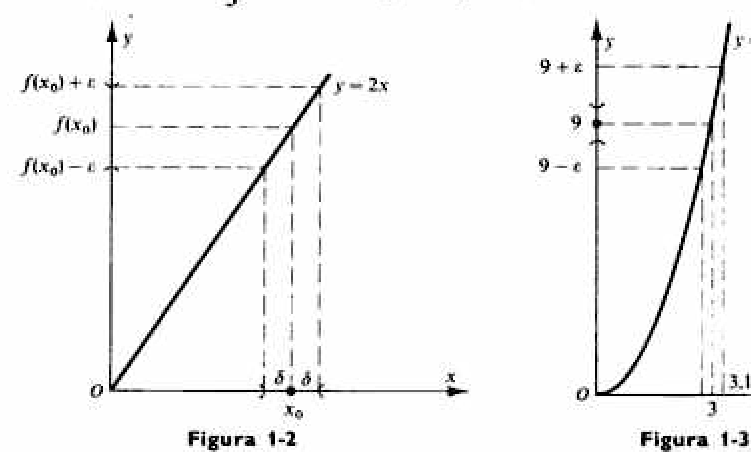


Figura 1-2 **Figura 1-3**

Se puede hallar para $\varepsilon = \frac{1}{3}$ un δ diferente que sirva para $x_0 = 3$ $\left(\text{por ejemplo, } \delta = \frac{1}{21}\right)$. Es posible hallar otro valor de x_0 para el cual no sirva este δ.

A continuación vamos a mostrar que si $f(x) = x^2$, dado $\varepsilon > 0$, no es posible hallar un δ tal que para todo x_0, si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

En efecto, para $f(x) = x^2$ y $\varepsilon > 0$ dado. Suponga que existe un $\delta > 0$ tal que para todo x_0, si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Tome $x_0 = \frac{\varepsilon}{\delta}$ y $x = x_0 + \frac{\delta}{2}$. Entonces $|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$, pero $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| = \left(2x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\delta}{2}\right) = x_0\,\delta + \frac{\delta^2}{4} = \varepsilon + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon$.

Así hemos hallado un x y un x_0 tales que $|x - x_0| < \delta$, pero $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Entonces no existe un $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ siempre implique que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La propiedad que verifica la función $f(x) = 2x$ y que no posee la función $f(x) = x^2$ la resumimos en la siguiente definición.

Definición. Una función f es uniformemente continua sobre un conjunto S, $S \subseteq \mathscr{D}_f$ equivale a decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cuando $x, x_0 \in S$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La función $f(x) = x^2$ es continua sobre **R** y, sin embargo, no es uniformemente continua sobre **R**. Esto muestra que la continuidad uniforme es una condición más fuerte que la condición de continuidad. Pero $f(x) = x^2$ sí es uniformemente continua en el intervalo $]0,2[$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ dado.

$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0|\,|x - x_0|$. Ahora, para todo $x, x_0 \in]0,2[$, $|x + x_0| < 4$ (porque $x \in]0,2[$ implica que $|x| < 2$ y $x_0 \in]0,2[\Rightarrow |x_0| < 2$). Entonces $|x + x_0| < |x| + |x_0| < 2 + 2 = 4$. Así, para $x, x_0 \in]0,2[$, $|f(x) - f(x_0)| = |x + x_0|\,|x - x_0| < 4\,|x - x_0|$. Tome a $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Entonces, para todo $x, x_0 \in]0,2[$ para los cuales $|x - x_0| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(x_0)| = |x + x_0|\,|x - x_0| < 4\,|x - x_0| < 4\delta = 4\,\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

Por tanto, $f(x) = x^2$ es uniformemente continua sobre $]0,2[$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1-46 Muestre que $f(x) = x^3$ es uniformemente continua sobre $[0,2]$ empleando el siguiente procedimiento: Para cualquier $\varepsilon > 0$ determine un $\delta > 0$ tal que para todo $x, x_0 \in [0,2]$ para los cuales $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Solución. $|x^3 - x_0^3| = |x - x_0|\,|x^2 + xx_0 + x_0^2|$. Sea $\varepsilon > 0$ dado.

$|f(x) - f(x_0)| = |x^3 - x_0^3| = |x - x_0|\,|x^2 + xx_0 + x_0^2|$. Ahora, para $x, x_0 \in [0,2]$, $|x^2 + xx_0 + x_0^2| < 12$ (porque $|x^2 + xx_0 + x_0^2| \leq |x^2| + |xx_0| + |x_0^2| = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2$). Así, para $x, x_0 \in [0,2]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq 12\,|x - x_0|$.

Por tanto, si se toma a $\delta = \frac{\varepsilon}{12}$ y si $x, x_0 \in [0,2]$ y si $|x - x_0| < \delta$, se tiene que

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|\,|x^2 + xx_0 + x_0^2| \leq 12\,|x - x_0| < 12.\ \delta = 12 \cdot \frac{\varepsilon}{12} = \varepsilon$$

Por consiguiente, $f(x) = x^3$ es uniformemente continua sobre $[0,2]$.

Problema 1-47 Pruebe que si f es uniformemente continua sobre S y $S \supseteq T$, entonces f es uniformemente continua sobre T.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como f es uniformemente continua sobre S, existe un δ tal que si $y, y_0 \in S$ y $|y - y_0| < \delta$, entonces $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Para el mismo δ, sea x y $x_0 \in T$ y $|x - x_0| < \delta$. Pero $T \subseteq S$ y, por tanto, $x, x_0 \in S$ y $|x - x_0| < \delta$. Entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Problema 1-48 Pruebe que si f es uniformemente continua sobre S y c es una constante, entonces cf es uniformemente continua sobre S.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Si $c = 0$, entonces cf es constante sobre S y $|(cf)(x) - (cf)(x)| = 0$ para cualquier elección de δ. Si $c \neq 0$ tome $\frac{\varepsilon}{|\delta|} > 0$.

Como f es uniformemente continua sobre S, existe un $\delta > 0$ tal que si $x, x_0 \in S$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Para este mismo δ, si $x, x_0 \in S$ y $|x - x_0| < \delta$, se tiene que $|(cf)(x) - (cf)(x_0)| = |c|\,|f(x) - f(x_0)| < |c|.\ \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. Por consiguiente, cf es uniformemente continua sobre S.

Problema 1-49 Si f y g son uniformemente continuas sobre S, entonces $f + g$ es uniformemente continua sobre S.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Como f es uniformemente continua sobre S, existe un δ_1 tal que cuando $x, x_0 \in S$ y $|x - x_0| < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como g es uniformemente continua sobre S, existe un $\delta_2 > 0$ tal que cuando $x, x_0 \in S$ y $|x - x| < \delta_2$, entonces $|g(x) - g(x_0)| < \delta_2$.

Tome a $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Entonces, si $x, x_0 \in S$ y $|x - x_0| < \delta$, se tiene que $x, x_0 \in S$, $|x - x_0| < \delta_1$ y $|x - x_0| < \delta_2$; por tanto, $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces

$$|(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nota. El producto de funciones uniformemente continuas no es uniformemente continua. Por ejemplo, $f(x) = x$ y $g(x) = x$; $f(x)g(x) = x^2$, que no es uniformemente continua sobre **R**.

Problema 1-50 *a*) Muestre que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua sobre **R**.
b) Muestre que la función x^2 es uniformemente continua sobre $]0,2[$.

Solución. *a*) Vamos a demostrar por reducción al absurdo que x^2 no es uniformemente continua sobre **R**. Suponga que para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbf{R}$.

$|f(x) - f(x_0)| = |x + x_0|\,|x - x_0| < \varepsilon$ cuando $|x - x_0| < \varepsilon$. Ahora tome a $x = \frac{\varepsilon}{\delta}$ y $x_0 = x + \frac{\delta}{2}$.

Entonces $|f(x) - f(x_0)| = (x + x_0)|x - x_0| = \left(2x + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > 2x \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = \varepsilon$.

Esta contradicción muestra que la hipótesis no es verdadera, y, por tanto, f no es uniformemente continua sobre **R**.

b) Sea $\varepsilon > 0$. Se quiere determinar un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in\,]0, 2[$ y para todo $x_0 \in\,]x - \delta, x + \delta[\, \cap\,]0, 2[$, $|x^2 - x_0^2| = |x + x_0|\,|x - x_0| < \varepsilon$.

En este caso, como x y x_0 pertenecen a $]0, 2[$, $|x + x_0|$ no se puede hacer arbitrariamente grande. Entonces suponemos que se puede hallar un δ. Si x, x_0 pertenecen al intervalo $]0, 2[$, entonces $|x| < 2$, $|x_0| < 2$, y $|x^2 - x_0^2| = |x + x_0|\,|x - x_0| < 4|x - x_0|$. Así, si $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $x \in\,]0, 2[$ y para todo $x_0 \in\,]x - \delta, x + \delta[\, \cap\,]0, 2[$; $|x^2 - x_0^2| < 4\,|x - x_0| = 4\,\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$. Entonces f es uniformemente continua sobre el intervalo $]0, 2[$. (Vea Fig. 1-4.)

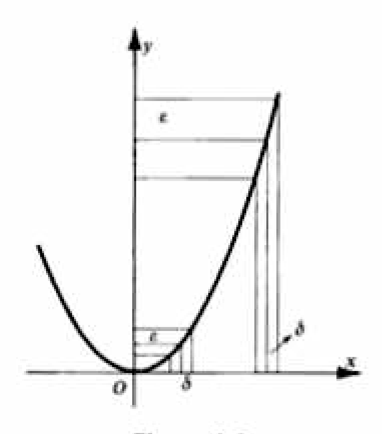


Figura 1-4

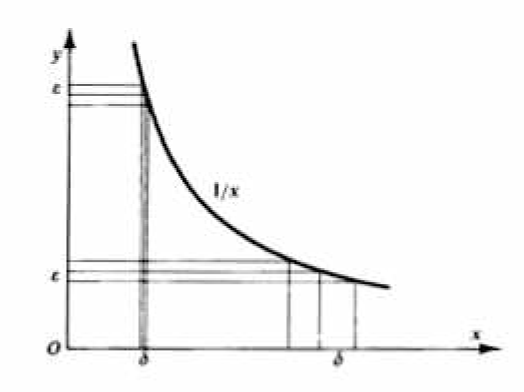


Figura 1-5

Problema 1-51 Muestre que la función $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua sobre el intervalo $]0, 2[$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos ver si existe o no un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in\,]0, 2[$ y para todo $x_0 \in\,]x - \delta, x + \delta[\, \cap\,]0, 2[$; $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{xx_0} < \varepsilon$.

Como $1/x$ es continua sobre $]0, 2[$, para cada x de $]0, 2[$ existe un $\delta(x) > 0$ tal que si $x_0 \in\,]x - \delta(x), x + \delta(x)[\, \cap\,]0, 2[$, entonces $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{xx_0} < \varepsilon$.

Sin embargo, a medida que x se hace más pequeño se debe elegir a $\delta(x)$ más pequeño (vea Fig. 1-5). Ahora, supongamos que f es uniformemente continua sobre $]0, 2[$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in\,]0, 2[$, y todo $x_0 \in\,]x - \delta, x + \delta[\, \cap\,]0, 2[$, $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{xx_0} < \varepsilon$.

Tome $x \in \left]0, \frac{\delta}{4\varepsilon}\right[\, \cap\,]0, 2[$ y $x_0 \in\,]0, 2[$ tal que $\frac{\delta}{2} < |x - x_0| < \delta$.

Para asegurarnos de que existe tal número suponemos que $\delta < 1$. Entonces, $\frac{|x_0 - x|}{xx_0} > \frac{\delta/2}{\frac{\delta}{4\varepsilon} \cdot 2} = \varepsilon$

Esto contradice la hipótesis original y, por consiguiente, f no es uniformemente continua sobre $]0, 2[$.

Problema 1-52 Muestre que si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua sobre $[a, b]$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in [a, b]$ y todo $x_0 \in]x - \delta, x + \delta[\cap [a, b]$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Como f es continua sobre $[a, b]$, para cada $x \in [a, b]$ existe un número positivo, que lo representamos por $\delta(x)$ para hacer énfasis en su dependencia de x tal que cuando $x_0 \in]x - \delta(x), x + \delta(x)[\cap [a, b]$, $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Se puede pensar en tomar a δ como el inf $\{\delta(x): x \in [a, b]\}$. Sin embargo, este número no sirve, puesto que el extremo inferior puede ser 0. Lo que haremos es emplear el teorema de Heine-Borel para obtener un conjunto finito de números positivos y tomar a δ como el mínimo elemento de este conjunto. Sea $I[x, \delta(x)]$ el intervalo $]x - \delta(x), x + \delta(x)[$ e $I\left(x, \frac{\delta(x)}{2}\right) = \left]x - \frac{\delta(x)}{2}, x + \frac{\delta(x)}{2}\right[$.

El conjunto de intervalos abiertos $\left\{ I\left(x, \frac{\delta(x)}{2}\right) : x \in [a,b] \right\}$ recubre a $[a,b]$. Entonces, por el teorema de Heine-Borel, existe una familia finita $\left\{ I\left(x_k, \frac{\delta(x_k)}{2}\right) : k = 1, 2, \ldots, n \right\}$ que recubre a $[a,b]$.

Sea δ el mínimo de los números $\frac{\delta(x_k)}{2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces δ es positivo. Ahora tome dos puntos x, x_0 en $[a,b]$ tales que $|x - x_0| < \delta$. Como $\left\{ I\left(x_k; \frac{\delta(x_k)}{2}\right) : k = 1, 2, \ldots, n \right\}$ recubre a $[a,b]$, $x \in I\left(x_k; \frac{\delta(x_k)}{2}\right)$ para algún $k(k = 1, 2, \ldots, n)$. También $|x_0 - x_k| = |x_0 - x + x - x_k| \leq |x_0 - x| + |x - x_k| < \delta + \frac{\delta(x_k)}{2} \leq \delta(x_k)$. Entonces x y x_0 están en $I[x_k; \delta(x_k)]$ y, por tanto, $|f(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|f(x_0) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(x_k) + f(x_k) - f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Así, para cualquier $\varepsilon > 0$, hemos mostrado que existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ cuando } x_0 \in]x - \delta, x + \delta[\cap [a, b]$$

Problema 1-53 Pruebe que la función $f(x) = ax + b$ es uniformemente continua sobre $\mathbf{R}$.

Solución. Suponga que $a \neq 0$. Si $\varepsilon > 0$ se quiere hallar un número positivo δ tal que para todo par de números reales x_1 y x_2, $|x_1 - x_2| < \delta$ implique que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Como $f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 - ax_2$,

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |x_1 - x_2|\,|a| < \varepsilon$$

¿Cómo debe ser δ para que $|x_1 - x_2|$ sea menor que $\varepsilon/|a|$ cuando $|x_1 - x_2|$ es menor que δ? El número δ puede ser cualquier número entre 0 y $\varepsilon/|a|$, incluyendo a $\varepsilon/|a|$. Se puede tomar por δ a $\varepsilon/|a|$ o $\varepsilon/2|a|$, $\varepsilon/3|a|$, o cualquier número positivo menor o igual a $\varepsilon/|a|$. Si tomamos a $\delta = \varepsilon/|a|$, entonces la implicación $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ es equivalente a $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{|a|} \Rightarrow |a|\,|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Por tanto, f es uniformemente continua sobre $\mathbf{R}$.

Problema 1-54 Muestre que el polinomio $2x^2 - 3x + 5$ es uniformemente continuo sobre el intervalo $[-3,6]$.

Solución. Sean $x_1, x_2 \in [-3,6]$. Ahora, $|f(x_1) - f(x_2)| = |(2x_1^2 - 3x_1 + 5) - (2x_2^2 - 3x_2 + 5)| = |2x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1 + 3x_2| = |2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 3(x_1 - x_2)| = |(x_1 - x_2)(2x_1 + 2x_2 - 3)| = |x_1 - x_2|\,|2x_1 + 2x_2 - 3| < \varepsilon$. Según la desigualdad triangular, tenemos que $|2x_1 + 2x_2 - 3| \leq 2|x_1| + 2|x_2| + 3 \leq 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 = 27$. ¿Cómo debe ser $|x_1 - x_2|$ para que $27|x_1 - x_2|$ sea menor que ε? Si $|x_1 - x_2| < \varepsilon/27$, entonces $27|x_1 - x_2| < \varepsilon$. En otras palabras, hemos mostrado que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ cuando $\delta = \frac{\varepsilon}{27}$, es decir, la función considerada es uniformemente continua.

Problema 1-55 Muestre que la función $f(x) = |x|$ es uniformemente continua sobre todo intervalo I.

Solución. Se quiere hallar una función $\delta(\varepsilon)$ tal que para todo número positivo ε y todo x_1 y x_2 en I, $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow ||x_1| - |x_2|| < \varepsilon$.

Sabemos que $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$ y, por tanto, $\delta(\varepsilon)$ se puede elegir como la función idéntica $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, puesto que $|x_1 - x_2| < \varepsilon \Rightarrow ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2| < \varepsilon$.

Problema 1-56 Muestre que la función $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua en todo intervalo de la forma $[\eta, +\infty[$ con η un número positivo.

Solución. Dado un número positivo ε se quiere hallar un δ tal que

$$\left.\begin{matrix} x_1 \geq \eta \\ x_2 \geq \eta \\ |x_1 - x_2| < \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} < \varepsilon$$

Como para $x_1 \geq \eta$ y $x_2 \geq \eta$, $\dfrac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq \dfrac{|x_1 - x_2|}{\eta^2}$.

Si se elige a $\delta = \eta^2\varepsilon$ se verifica que $\left|\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right| < \varepsilon$, es decir, la función es uniformemente continua sobre los intervalos de la forma $[\eta, +\infty[$.

Problema 1-57 Pruebe que la función $\sqrt{x}$ es uniformemente continua sobre el intervalo $[0, +\infty[$.

Solución. Si ε es un número arbitrario y positivo se quiere hallar un δ tal que si x_1 y x_2 son números no negativos, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} < \varepsilon$.

Vamos a mostrar que $|x_1 - x_2| < \varepsilon^2 \Rightarrow \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| < \varepsilon$. Para establecer esta desigualdad vamos a mostrar que se verifica la desigualdad $\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|}$.

Sea $a = \min\{\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}\}$, $b = \max\{\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}\}$, entonces como $\sqrt{x}$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty[$, $a^2 = \min\{x_1, x_2\}$ y $b^2 = \max\{x_1, x_2\}$. Como $\sqrt{x}$ es estrictamente creciente, $(b - a)^2 \leq b^2 - a^2$. Entonces $|x_1 - x_2| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{|x_1 - x_2|} < \varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| < \varepsilon$.

Esto muestra que la función es uniformemente continua sobre $[0, +\infty[$.

Problema 1-58 Muestre que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua sobre $]0, +\infty[$.

Solución. En este caso hay que elegir puntos lo suficientemente cercanos para que sus imágenes estén muy separadas. Sea $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$. Para hallar x_1 y x_2 en este caso se puede tomar a $x_2 = x_1 + \dfrac{\delta}{2}$. Como la desigualdad $|x_1 - x_2| < \delta$ está garantizada, la desigualdad $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$ toma la forma

$$\left|x_1^2 - \left(x_1 + \frac{\delta}{2}\right)^2\right| = \left|x_1\delta + \frac{\delta^2}{4}\right| \geq 1 \qquad (1)$$

El problema de hallar un número positivo x_1 para que (1) sea verdadera se puede remplazar por el problema más simple de hallar x_1 tal que $x_1\delta \geq 1$. Por tanto, definimos a x_1 y x_2 como $x_1 = \dfrac{1}{\delta}$, $x_2 = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$ y, por consiguiente, x_1 y $x_2 \in\ ]0, +\infty[$ y $|x_1 - x_2| < \delta$ y $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 1$.

Problema 1-59 Pruebe que la función $f(x) = \text{sen } 1/x$, $x \neq 0$ no es uniformemente continua sobre el intervalo $]0, 1]$.

Solución. El grafo de la función revela que hay una dificultad en el origen. Debido a que los valores de la función oscilan entre 1 y -1, parece que se puedan encontrar puntos arbitrariamente cercanos de tal manera que los valores de la función estén separados por una distancia igual a 2. Sea $\varepsilon = 2$. Si n es un entero positivo lo suficientemente grande y si $x_1 = \dfrac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}$, $x_2 = \dfrac{1}{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi}$, entonces la desigualdad $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$ se convierte en $\left|\text{sen}\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi - \text{sen}\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi\right| = \text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \geq 2$, verdadera para todo n positivo. Si δ es un número positivo, la desigualdad $|x_1 - x_2| < \delta$ está garantizada por un valor de n lo suficientemente grande, puesto que $|x_1 - x_2| \leq x_1 + x_2 < 2x_2 < \dfrac{2}{(2n-2)\pi} = \dfrac{1}{(n-1)\pi}$. Ahora podemos asegurar que $|x_1 - x_2| < \delta$ si $\dfrac{1}{(n-1)\pi} \leq \delta \Rightarrow n \geq 1 + \dfrac{1}{\pi\delta}$. Como existen enteros positivos mayores o iguales a $1 + \dfrac{1}{\pi\delta}$ se puede obtener un valor específico de n:

$$n = \inf \left\{ m : m \in \mathbf{R}^+ \text{ y } m \geq 1 + \frac{1}{\pi\delta} \right\}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Verifique que: *a)* $1{,}42 \neq \inf \{x : x^2 > 2 \text{ y } x > 0\}$.
b) $2 = \sup \{x : x^2 < 4 \text{ y } x > 0\}$.
c) $-3 = \sup \{x : x^2 > 9 \text{ y } x < 0\}$.

2. Sea S el conjunto de los números irracionales en $[0, 1]$. Muestre que S no tiene máximo ni mínimo. ¿Cuáles son $\inf S$ y $\sup S$?

3. Muestre que si $c = \sup S$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $x \in S$ tal que $0 \leq c - x < \varepsilon$. Así, si I es un intervalo abierto que contiene a c, existe un $x \in S$ tal que $x \in I$.

4. Halle el sup e inf de los siguientes conjuntos. ¿Tienen los conjuntos elementos máximo y mínimo?: *a)* $\left\{1 - \frac{1}{n} : n \text{ entero positivo}\right\}$; *b)* $\left\{n + (-1)^n \frac{1}{n} : n \text{ entero positivo}\right\}$.

Resp.: *a)* sup = 1, inf = 0, no tiene ni máximo ni mínimo. *b)* No tiene sup, inf = 0, no tiene elemento máximo o mínimo.

5. Construya un conjunto de números racionales que tenga a $\sqrt{3}$ como su sup. Verifique que $\sup S = \sqrt{3}$.

6. Desarrolle un procedimiento para obtener una aproximación decimal de la raíz cúbica positiva de un número real positivo.

7. Muestre que entre dos números reales distintos hay una infinidad de números irracionales.

8. Muestre que si existe un número real positivo M tal que para cada x y x_0 de S, $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$, entonces f es uniformemente continua sobre S.

9. Muestre que si f y g son funciones uniformemente continuas sobre un conjunto S, entonces $f + g$ es uniformemente continua sobre S.

10. Muestre que las siguientes funciones son uniformemente continuas en los intervalos indicados y halle δ en términos de ε.
a) $5x - 7, \mathbf{R}$; *b)* $7x + 4, \mathbf{R}$; *c)* $x^2 + 2x - 4, [2, 5]$; *d)* $3x^2 - x + 5, [-2, 1]$; *e)* $1/x,]3, +\infty[$; *f)* $1/(x+3), [2, +\infty[$; *g)* $\dfrac{x+1}{x+4}, \mathbf{R}^+$; *h)* $\dfrac{2x-1}{3x+2}, [0, +\infty[$.

Resp.: *a)* $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$; *b)* $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$; *c)* $\delta = \frac{\varepsilon}{12}$; *d)* $\delta = \frac{\varepsilon}{13}$; *e)* $\delta = 9\varepsilon$; *f)* $\delta = 25\varepsilon$; *g)* $\delta = \frac{16}{3}\varepsilon$; *h)* $\delta = \frac{9}{7}\varepsilon$.

11. Muestre que las siguientes funciones no son uniformemente continuas sobre el intervalo especificado. Halle valores explícitos de x_1 y x_2 para un $\delta > 0$ arbitrario y $\varepsilon = 1$.

a) $1/x^2$, $]0,2]$; *b)* $1/\sqrt{x}$, $]0,4]$; *c)* $x^2 + x$ $\mathbf{R}^+$; *d)* x^3, $\mathbf{R}^+$.

Resp.: *a)* $x_2 = \min\{\sqrt{3}, \delta\}$, $x_1 = \dfrac{x_2}{2}$; *b)* $x_2 = \min\{1, \delta\}$, $x_1 = \dfrac{x_2}{4}$; *c)* $x_1 = \dfrac{1}{\delta}$, $x_2 = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$; *d)* $x_1 = \dfrac{4}{3\delta^2}$, $x_2 = \dfrac{4}{3\delta^2} + \dfrac{\delta}{2}$.

12. Muestre que la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 1 \\ 5 - 4x, 1 < x \le 2 \end{cases}$ es uniformemente continua sobre el intervalo $[0,2]$.

13. Emplee algunos de los teoremas demostrados en los problemas para mostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas sobre los intervalos especificados.

a) $2x^3 + 4x + 7 + (3x - 5)\sqrt{x}$, $[0,10]$; *b)* $x^2 + (5x^3 - 8x - 11)|x|$, $[-2,3]$; *c)* $(x^2 + 4) + \dfrac{x - 5}{x}$, $[1,8[$; *d)* $(x + \sqrt{x})^3 - 7(x^2 - |x|) + 1/x$, $[2,5]$.

14. Sean A y B conjuntos de números reales no vacíos y mayorados. Pruebe que si $a \in A \Rightarrow a \ge 0$ y $b \in B \Rightarrow b \ge 0$, $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$.

Indicación. Sea $x = \sup A$ y $y = \sup B$, y suponga que $\sup(AB) = xy$. Sea $\varepsilon = xy - \sup(AB)$. Entonces, $\exists a \in A$ tal que $a > x - \varepsilon/2y$ y $\exists b \in B$ tal que $b > y - \varepsilon/2x$. Pero esto significa que $ab > xy - \varepsilon$.

15. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales minorados. Si $a \in A \Rightarrow a \ge 0$ y $b \in B \Rightarrow b \ge 0$, $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$.

Indicación. Sea $x = \inf A$, $y = \inf B$, y suponga que $\inf(AB) > xy$. Entonces $x > 0$ y $y > 0$. Sea $\varepsilon = \min[\inf(AB) - xy, 3xy]$. Entonces $\exists a \in A$ tal que $a < x + \varepsilon/3y$ y $\exists b \in B$ tal que $b < y + \varepsilon/3x$.

CAPITULO 2

La integral definida

El concepto de «integral definida» de una función sobre un intervalo de números reales está relacionada con una gran variedad de problemas de geometria, estadistica, probabilidades, física, economia, etc. Es uno de los dos conceptos fundamentales del cálculo; el otro es el de derivada.

Definición 1. Un conjunto finito de puntos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ si, y solamente si, $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$.

$a = x_0$ x_1 x_2 x_3 x_i $b = x_n$

Figura 2-1

Ejemplo 2-1. Si $P_1 = \{0, 1/7, 1/3, 1\}$ y $P_2 = \{0, 1/7, 1/4, 3/4, 1\}$ son particiones del intervalo $[0,1]$. Además $P_1 \cup P_2 = \{0, 1/7, 1/4, 1/3, 3/4, 1\}$ y $P_1 \cap P_2 = \{0, 1/7, 1\}$ son también particiones de $[0,1]$.

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión. El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo. La longitud del i-ésimo subintervalo se define como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Observe que empleando la propiedad «telescópica» de la suma se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

En otras palabras, la suma de las longitudes de todos los subintervalos de una partición es igual a la longitud del intervalo dado.

Definición 2. La norma de una partición se designa por $\|P\|$ y se define como

$$\|P\| = \max \{\Delta x_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Ejemplo 2-2. En el Ejemplo 2-1, $\|P_1\| = \max \{1/7, 4/21, 2/3\} = 2/3$; $\|P_2\| = \max \{1/7, 3/28, 1/2, 1/4\} = 1/2$; $\|P_1 \cup P_2\| = 5/12$; $\|P_1 \cap P_2\| = 6/7$. Observe que $\|P_1 \cup P_2\| \leq \min (\|P_1\|, \|P_2\|)$.

Definición 3. Suponga que f es acotada sobre $[a, b]$ y $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ y $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$. Sea

$$m_i = \inf \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i = \sup \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Se define la suma superior de f para P, representada por $S(f, P)$, por

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

La suma inferior de f para P se representa por $I(f, P)$ y se define como

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Nota. El hecho de que f sea acotada sobre $[a, b]$ garantiza que m_i y M_i estén siempre definidos. Los números m_i y M_i se definieron como extremo superior e inferior, en vez de máximo y mínimo, debido a que no se supuso que f fuera continua.

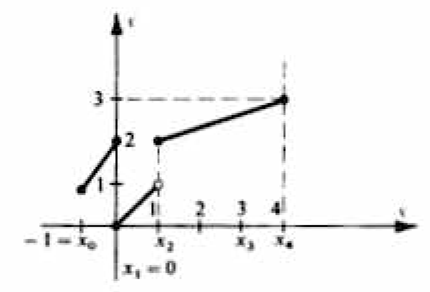


Figura 2-2

Ejemplo 2-3. Sea f una función definida por $f(x) =$

$$= \begin{cases} x + 2, & -1 \le x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} + 1, & 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

Sea $[a, b] = [-1,4]$ y $P = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$. f es acotada sobre $[-1,4]$ porque $0 \le f(x) \le 3$. $\forall x \in [-1, 4]$. Si $M_i = \sup f([x_i, x_{i-1}])$ y $m_i = \inf f([x_i, x_{i-1}])$, entonces: *a)* para $[x_0, x_1]$, $m_1 = 1$ y $M_1 = 2$; *b)* para $[x_1, x_2]$, $m_2 = 0$ y $M_2 = 2$; *c)* para $[x_2, x_3]$, $m_3 = 2$ y $M_3 = \sqrt{3} + 1$; *d)* para $[x_3, x_4]$, $m_4 = \sqrt{3} + 1$ y $M_4 = 3$.

Observe que $0 \le m_i \le M_i \le 3$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Ejemplo 2-4. Sea $f(x) = x^2$ para $x \in [0,1]$ y $P = \{0; 0{,}2; 0{,}5; 0{,}8; 1\}$. f es acotada sobre $[0,1]$ porque $0 \le f(x) \le 1$. Si $M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])$ y $m_i = \inf([x_{i-1}, x_i])$, entonces: *a)* $m_1 = 0$, $M_1 = 0{,}04$; *b)* $m_2 = 0{,}04$ y $M_2 = 0{,}25$; *c)* $m_3 = 0{,}25$ y $M_3 = 0{,}64$; *d)* $m_4 = 0{,}64$ y $M_4 = 1$.

Observe que $0 \le m_i \le M \le 1$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Ejemplo 2-5. Si $f(x) = x^2$ sobre $[0,1]$ y $P = \{0; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}7; 1\}$, halle $I(f, P)$.

Solución. $I(f, P) = \sum_{i=1}^{4} M_i \Delta x_i = 0\,(0{,}4 - 0) + 0{,}16\,(0{,}5 - 0{,}4) + 0{,}25\,(0{,}7 - 0{,}5) + 0{,}49(1 - 0{,}7) =$
$= 0{,}213$.

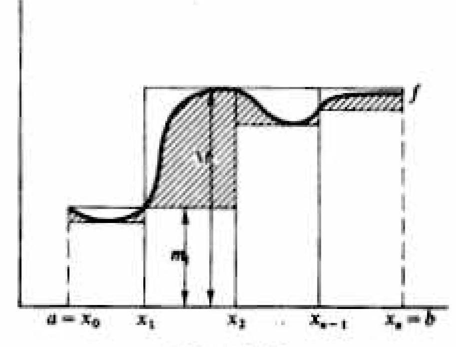


Figura 2-3

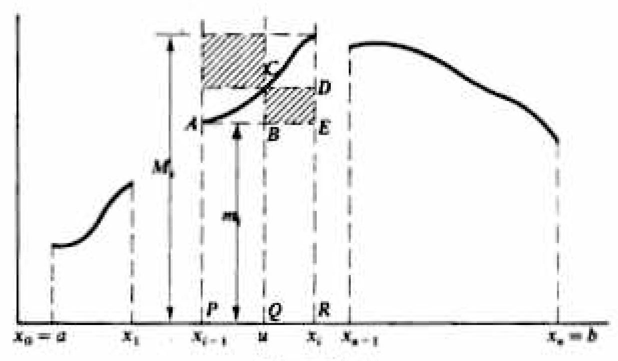


Figura 2-4

La Figura 2-3 muestra que las sumas inferiores corresponden al área de los rectángulos rayados por debajo del grafo de f y los rectángulos que sobresalen por encima del grafo de f corresponden a las sumas superiores.

Nota. El subíndice i dice que M_i y m_i son extremos superior e inferior de la restricción de f al subintervalo i-ésimo de la partición. Los valores M_i y m_i son los puntos extremos de la derecha y la izquierda del intervalo más pequeño que contiene la imagen de la restricción de f al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. La Figura 2-4 muestra el modelo geométrico de $M_i\Delta x_i$ y $m_i\Delta x_i$, como las áreas de los rectángulos de base Δx_i y alturas M_i y m_i.

Además, la Figura 2-4 muestra el término a que da lugar el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ en $I(f, P)$, que está representado por el rectángulo $PREA$. El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da lugar a dos términos en $I(f, P)$ originados al intercalar u, y están representados por las áreas de los rectángulos $PQBA$ y $QRDC$.

Observe que la suma de las áreas de estos dos últimos rectángulos es mayor que el área de $PREA$ y la diferencia está representada por el área del rectángulo $BEDC$. Esto sugiere que si una partición se refina, las sumas inferiores correspondientes al refinamiento son mayores o iguales a la suma inferior de la partición original.

Definición 4. Dadas dos particiones, P_1 y P_2, de $[a, b]$, se dice que P_1 es un refinamiento de P_2 si $P_1 \supset P_2$.

Ejemplo 2-6. Las particiones $P_1 = \{0, 1/4, 1/2, 2/3, 1\}$ y $P_2 = \{0, 1/3, 1/2, 3/4, 1\}$ son más finas que la partición $P = \{0, 1/2, 1\}$ porque $P \subset P_2$, $P \subset P_1$. P_1 no es un refinamiento de P_2. La unión $P_1 \cup P_2 = \{0, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1\}$ es más fina que P_1 y P_2.

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$ y P^* el conjunto de todas las particiones posibles de $[a, b]$. Sea $L^* = \{I(f, P) : P \in P^*\}$ el conjunto de todas las posibles sumas inferiores de f sobre $[a, b]$ y $U^* = \{S(f, P) : P \in P^*\}$ el conjunto de todas las posibles sumas superiores de f sobre $[a, b]$.

Definición 5. Sea f una función acotada sobre $[a, b]$ y P^* el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Se define

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{I(f, P) : P \in P^*\}$$
$$\overline{\int_a^b} f = \inf \{S(f, P) : P \in P^*\}$$

$\underline{\int_a^b} f$ se llama integral inferior de f, de a a b, e $\overline{\int_a^b} f$, integral superior de f, de a a b. Como f es extremada sobre $[a, b]$, $\underline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} f$ existen e $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definición 6. Se dice que una función f definida sobre $[a, b]$ es integrable según Riemann si f es acotada sobre $[a, b]$ e $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Si f es integrable sobre $[a, b]$, la integral definida de Riemann de f desde a a b se representa por $\int_a^b f$ y se define por $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$.

También se escribe $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx$. La variable «x» es aparente y, por tanto, se puede representar por cualquier símbolo.

La integral $\int_a^b f$ representa el área comprendida entre el grafo de la función y el intervalo $[a, b]$ sobre el eje X, cuando $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$.

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Aditividad con respecto al intervalo de integración.
2. $\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$. Linealidad con respecto al integrando.
3. $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.
4. $\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|$. Acotación modular.
5. Si $m \le f \le M$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow m(b - a) \le \int_a^b f \le M(b - a)$.
6. $\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)$. Invariancia por traslación.
7. $\int_a^b f = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx$. Expansión o contracción del intervalo de integración.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 2-1 Si $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & -1 \le x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \le x < 1 \\ 3, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

y $P = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 3/2, 2\}$ halle $I(f, P)$.

Solución. $I(f, P) = \sum_{i=1}^{5} m_i \Delta x_i = 3{,}5[-0{,}5 - (-1)] + 1[0 - (-0{,}5)] + 1(0{,}5 - 0) + 1{,}25(1{,}5 - 0{,}5) + 3(2 - 1{,}5) = 5{,}5$.

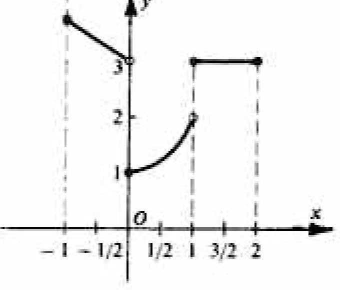


Figura 2-5

Problema 2-2 Si $f(x) = x^2$ sobre $[0, 1]$ y $P = \{0;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9;\ 1\}$, halle $I(f, P)$ y $S(f, P)$.

Solución. *a)* $S(f, P) = \sum_{i=1}^{4} M_i \Delta x_i = 0{,}25(0{,}5 - 0) + 0{,}49(0{,}7 - 0{,}5) + 0{,}81(0{,}9 - 0{,}7) + 1(1 - 0{,}9) = 0{,}485$.

b) $I(f, P) = \sum_{i=1}^{4} m_i \Delta x_i = 0(0{,}5 - 0) + 0{,}25(0{,}7 - 0{,}5) + 0{,}49(0{,}9 - 0{,}7) + 0{,}81(1 - 0{,}9) = 0{,}229$.

Problema 2-3 Si $f(x) = x + 3$ sobre $[0, 5]$ y $P_1 = \{0, 2, 4, 5\}$, $P_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Halle $I(f, P_1)$, $S(f, P_1)$, $I(f, P_2)$, $S(f, P_2)$.

Solución. $I(f, P_1) = \sum_{i=1}^{3} m_i \Delta x_i = -3(2 - 0) + 5(4 - 2) + 7(5 - 4) = 23$.

$S(f, P_1) = \sum_{i=1}^{3} M_i \Delta x_i = 5(2 - 0) + 7(4 - 2) + 8(5 - 4) = 32$.

$I(f, P_2) = \sum_{i=1}^{5} m_i \Delta x_i = 3(1 - 0) + 4(2 - 1) + 5(3 - 2) + 6(4 - 3) + 7(5 - 4) = 25$.

$S(f, P_2) = \sum_{i=1}^{5} M_i \Delta x_i = 4(1 - 0) + 5(2 - 1) + 6(3 - 2) + 7(4 - 3) + 8(5 - 4) = 30$.

Observe que $I(f, P_1) \le I(f, P_2) \le S(f, P_2) \le S(f, P_1)$ con $P_1 \subseteq P_2$.

Problema 2-4 Sea f: $[a, b] \to \mathbf{R}$, f acotada y $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$. Muestre que: *a)* $I(f, P) \leq S(f, P)$; *b)* $m \leq f(x) \leq M$ sobre $[a, b]$; *c)* $m(b - a) \leq I(f, P)$; *d)* $S(f, P) \leq M(b - a)$.

Solución. Las siguientes relaciones justifican la demostración:

a) $m \leq m_i \leq M_i \leq M$.

b) $m\Delta x_i \leq m_i\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i \leq M\Delta x_i$.

c) $\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i$.

d) $m(b - a) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \leq M(b - a)$.

Problema 2-5 Si f es una función acotada y f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ y P_2 una partición más fina que P_1, entonces $I(f, P_1) \leq I(f, P_2)$ y $S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$.

Solución. Considere el caso de la Figura 2-6 en que P_2 contiene un punto más que P_1. $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $P_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, u, \quad x_j, \ldots, x_n\}$.

Con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{j-1} < u < x_j < \ldots < x_n = b$.
Sea $m'_j = \inf\{f(x): x_{j-1} \leq x \leq u\}$
$m''_j = \inf\{f(x): u \leq x \leq x_j\}$.

Entonces $I(f, P_1) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$ e $I(f, P_2) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i\Delta x_i + m'_j(u - x_{j-1}) + m''_j(x_j - u) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i\Delta x_i$.

Para mostrar que $I(f, P_1) \leq I(f, P_2)$ es suficiente mostrar que $m_j\Delta x_j \leq m'_j(u - x_{j+1}) + m''_j(x_j - u)$. El conjunto $\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$ contiene todos los números de $\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq u\}$ y posiblemente algunos más pequeños; por tanto, inf del primer conjunto es menor o igual a inf del segundo conjunto. Así, $m_j \leq m'_j$ y $m_j \leq m''_j$.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} m_j(u - x_{j-1}) \leq m'_j(u - x_{j-1}) \\ m_j(x_j - u) \quad\; \leq m''_j(x_j - u) \end{array}\right\} \Rightarrow m_j(x_j - x_{j-1}) \leq m'_j(u - x_{j-1}) + m''_j(x_j - u)$$

Por tanto, $m_j\Delta x_j = m_j(u - x_{j-1}) + m_j(x_j - u) \leq m'_j(u - x_{j-1}) + m''_j(x_j - u)$.

Esto demuestra el caso $I(f, P_1) \leq I(f, P_2)$. La demostración de $S(f, P_1) \geq S(f, P_2)$ es análoga.

El caso general se puede deducir fácilmente. La partición P_2 se puede obtener de P_1 agregando un punto cada vez; en otras palabras, existe una sucesión de particiones $P_1 = Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n = P_2$ tal que Q_{j+1} contiene un punto más que Q_j. Entonces

$$I(f, P_1) = I(f, Q_1) \leq I(f, Q_2) \leq \ldots \leq I(f, Q_n) = I(f, P_2)$$

y

$$S(f, P_1) = S(f, Q_1) \geq S(f, Q_2) \geq \ldots \geq S(f, Q_n) = S(f, Q)$$

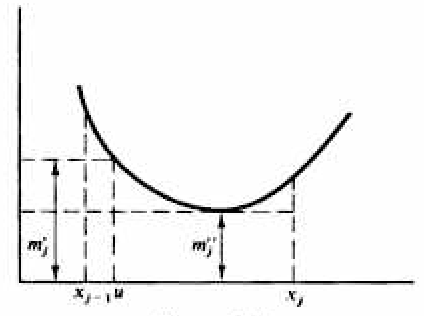


Figura 2-6

Problema 2-6 Sean P_1 y P_2 particiones de $[a, b]$ y f una función acotada sobre $[a, b]$. Entonces $I(f, P_1) \leq S(f, P_2)$.

Solución. Como $P_1 \cup P_2$ es un refinamiento de P_1 y P_2, por el problema anterior,

$$I(f, P_1) \leq I(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_2), \text{ entonces } I(f, P_1) \leq S(f, P_2)$$

Problema 2-7 Sea $f(x) = x^2$ sobre $[0, 1]$, $P_1 = \{0, 1/3, 2/3\}$ y $P_2 = \{0, 1/2, 1\}$. Muestre que $I(f, P_1) \leq S(f, P_2)$.

Solución. $I(f, P_1) = 0^2(1/3) + (1/3)^2(1/3) + (2/3)^2(1/3) = 5/27 < 5/8 = (1/2)^2(1/2) + (1)^2(1/2) = S(f, P_2)$.

Problema 2-8 Sea $f(x) = x^2$ sobre $[0, 1]$ y $P_1 = \{0; 0,5; 1\}$ y $P_2 = \{0; 0,3; 0,7; 1\}$ particiones de $[0, 1]$. Ilustre la desigualdad $I(f, P_1) \leq I(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_2)$.

Solución. $I(f, P_1) = 0(0,5 - 0) + 0,25(1 - 0,5) = 0,125$.

$$P_1 \cup P_2 = \{0; 0,3; 0,5; 0,7; 1\}. \ I(f, P_1 \cup P_2) = 0(0,3 - 0) + 0,09(0,5 - 0,3) + \\ + 0,25(0,7 - 0,5) + 0,49(1 - 0,7) = 0,215$$

$$S(f, P_1 \cup P_2) = 0,09(0,3 - 0) + 0,25(0,5 - 0,3) + 0,49(0,7 - 0,5) + 1(1 - 0,7) = 0,475.$$
$$S(f, P_2) = 0,09(0,3 - 0) + 0,49(0,7 - 0,3) + 1(1 - 0,7) = 0,523.$$

Entonces, $I(f, P_1) \leq I(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_2)$.

Problema 2-9 *a)* Dé un ejemplo de una función para la cual la integral inferior sea igual a la integral superior. *b)* Si $f(x) = \begin{cases} 0, x \text{ irracional} \\ 1, x \text{ racional} \end{cases}$ Muestre que $\underline{\int_0^1} f$ no es igual a $\overline{\int_0^1} f$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

Solución. *a)* Suponga que $f(x) = 3$ para todo x de $[a, b]$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, entonces $m_i = M_i = 3$. Por tanto, $I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 3(x_i - x_{i-1}) = 3(b - a)$ y $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 3(x_i - x_{i-1}) = 3(b - a)$. En este caso, todas las sumas superiores son iguales a las sumas inferiores y $\sup \{I(f, P)\} = \inf \{S(f, P)\} = 3(b - a)$.

b) Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición, entonces $m_i = 0$ porque existe un número irracional en $[x_i, x_{i-1}]$ y $M_i = 1$ porque existe un número racional en $[x_i, x_{i-1}]$. Por tanto,

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0 \ \text{ y } \ S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = b - a$$

En este caso, $\sup \{I(f, P)\} \neq \inf \{S(f, P)\}$ porque $0 \neq 1$. Esto muestra que al área comprendida entre el grafo de la función y el intervalo $[a, b]$ puede asignársele un valor comprendido entre 0 y $b - a$.

Problema 2-10 (Criterio de integrabilidad.) Si f es acotada sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si, y solamente si, para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que $|S(f, P) - I(f, P)| < \varepsilon$.

Solución. Suponga que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P con $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$. Como $\inf \{S(f, P_1)\} \leq S(f, P)$ y $\sup \{I(f, P_1)\} \geq I(f, P)$, entonces $\inf \{S(f, P_1)\} - \sup \{I(f, P_1)\} < \varepsilon$. Como esta última relación es verdadera para todo $\varepsilon > 0$, entonces $\sup \{I(f, P_1)\} = \inf \{S(f, P_1)\}$; por definición, entonces f es integrable. La demostración de la afirmación recíproca es similar.

Si f es integrable, entonces $\sup\{I(f, P)\} = \inf\{S(f, P)\}$. Esto quiere decir que para cada $\varepsilon > 0$ existen particiones P_1 y P_2 con $S(f, P_1) - I(f, P_2) < \varepsilon$. Sea P una partición que contiene a P_1 y P_2. Entonces, por el problema anterior, $S(f, P) \leq S(f, P_2)$; $I(f, P) \geq I(f, P_1)$; por consiguiente, $S(f, P) - I(f, P) \leq S(f, P_2) - I(f, P_1) < \varepsilon$.

Propiedades de la integral

Problema 2-11 Sea $c \in [a, b]$. Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$ y, recíprocamente, si f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$. Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Solución. Suponga que f es integrable sobre $[a, b]$. Si $\varepsilon > 0$ existe una partición $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.

Suponga que $c = x_j$ para algún j. [De otra manera, sea Q la partición que contiene a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y c, entonces Q contiene a P y, por tanto, $S(f, Q) - I(f, Q) \leq S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.]

Sea $P' = \{x_0, x_1, \ldots, x_j\}$ una partición de $[a, c]$ y $P'' = \{x_j, \ldots, x_n\}$ una partición de $[c, b]$. Como $I(f, P) = I(f, P') + I(f, P'')$ y $S(f, P) = S(f, P') + S(f, P'')$, entonces $[S(f, P') - I(f, P')] + [S(f, P'') - I(f, P'')] = S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.

Como cada término del paréntesis no es negativo, cada uno es menor que ε. Esto muestra que f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$. Observe también que $I(f, P') \leq \int_a^c f \leq S(f, P')$ e $I(f, P'') \leq \int_c^b f \leq S(f, P'')$; por tanto, $I(f, P) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq S(f, P)$. Como esto es verdadero para cualquier partición P, demuestra que $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.

Ahora suponga que f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$. Si $\varepsilon > 0$ existe una partición P' de $[a, c]$ y una partición P'' de $[c, b]$ tal que

$$S(f, P') - I(f, P') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } S(f, P'') - I(f, P'') < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si P es una partición que contiene todos los puntos de P' y P'', entonces $I(f, P) = I(f, P') + I(f, P'')$ y $S(f, P) = S(f, P') + S(f, P'')$; por tanto, $S(f, P) - I(f, P) = [S(f, P') - I(f, P')] + [S(f, P'') - I(f, P'')] < \varepsilon$.

Problema 2-12 Si f y g son integrables sobre $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable sobre $[a, b]$ e $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Solución. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $m_i = \inf\{(f + g)(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$; $m_i' = \inf\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$; $m_i'' = \inf\{g(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ y defina a M_i, M_i', M_i'' en forma similar. En general no es verdad que $m_i = m_i' + m_i''$, pero sí es verdad que $m_i \geq m_i' + m_i''$ y $M_i \leq M_i' + M_i''$. Por tanto, $I(f, P) + I(g, P) \leq I(f + g, P)$ y $S(f + g, P) \leq S(f, P) + S(g, P)$.

Así, $I(f, P) + I(g, P) \leq I(f + g, P) \leq S(f + g, P) \leq S(f, P) + S(g, P)$. Como f y g son integrables existen particiones P' y P'' con $S(f, P') - I(f, P') < \frac{\varepsilon}{2}$ y $S(f, P'') - I(f, P'') < \frac{\varepsilon}{2}$. Si P contiene a P' y P'', entonces $S(f, P) + S(g, P) - [I(f, P) + I(g, P)] < \varepsilon$ y, por tanto, $S(f + g, P) - I(f + g, P) < \varepsilon$. Esto demuestra que $f + g$ es integrable sobre $[a, b]$. Además,

$$I(f, P) + I(g, P) \leq I(f + g, P) \leq \int_a^b (f + g) \leq S(f + g, P) \leq S(f, P) + S(f, P) \qquad (1)$$

$$I(f, P) + I(g, P) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq S(f, P) + S(g, P) \qquad (2)$$

Como $S(f, P) - I(f, P)$ y $S(g, P) - I(g, P)$ se pueden hacer tan pequeñas como se quiera, entonces $S(f, P) + S(g, P) - [I(f, P) + I(g, P)]$ se puede hacer tan pequeña como se quiera; luego de (1) y (2) tenemos que $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Problema 2-13 Si f y g son funciones integrables sobre $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Solución. Observe que para cualquier partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ y $j = 1, 2, ..., m$ sabemos que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [x_{j-1}, x_j]$. Entonces $\sup f([x_{j-1}, x_j]) \leq \sup g([x_{j-1}, x_j])$ e $\inf f([x_{j-1}, x_j]) \leq \inf g([x_{j-1}, x_j])$. Así, $m_j(f) \leq m_j(g)$ y $M_j(f) \leq M_j(g)$. Entonces $S(f, P) \leq S(g, P)$ e $I(f, P) \leq I(g, P)$ para cada partición P. Entonces $\int_a^b f = \sup \{I(f, P)\} \leq \sup \{I(g, P)\}$, $\therefore \int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Problema 2-14 Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable sobre $[a, b]$ y $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Solución. Definamos las funciones f^+ y f^- por $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$ y $f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$.
Es evidente que $f = f^+ + f^-$ y $|f| = f^+ - f^-$. Vamos a ver primero que f integrable sobre $[a, b]$ implica que f^+ es integrable sobre $[a, b]$. Como $f^+(x) \geq 0$ y $f^+(x) \geq f(x)$ para cada x, entonces $M_i(f^+) = M_i(f) > 0$ y $m_i(f^+) \geq m_i(f)$ o $M_i(f^+) = 0$ y $m_i(f^+) = 0$.

En cualquier caso, $M_i(f^+) - m_i(f^+) \leq M_i(f) - m_i(f)$. Entonces, por cada partición P de $[a, b]$, $S(f^+, P) - I(f^+, P) \leq S(f, P) - I(f, P)$ y, según el criterio de integrabilidad, f^+ es integrable sobre $[a, b]$. Según el Problema 2-12, la diferencia de dos funciones integrables es integrable. Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f^+ es integrable sobre $[a, b]$ y, por consiguiente, $f^- = f - f^+$ es integrable sobre $[a, b]$. Por tanto, $|f| = f^+ - f^-$ es integrable sobre $[a, b]$.

Como $-f(x) \leq |f(x)|$ y $f(x) \leq |f(x)|$ para cada x de $[a, b]$, entonces $-\int_a^b f = \int_a^b -f \leq \int_a^b |f|$ e $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Por tanto, $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Problema 2-15 Suponga que f es integrable sobre $[a, b]$ y que $m \leq f \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$.

Solución. Si $h(x) = m$ y $m \in [a, b]$, h es integrable y $h(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces, por el Problema 2-13, $\int_a^b h \leq \int_a^b f$. Pero $\int_a^b h = \int_a^b m dx = m(b - a)$; por tanto, se tiene la primera desigualdad. La segunda desigualdad se obtiene en forma análoga.

Problema 2-16 Sea $f(x) = x$; muestre que es integrable sobre $[a, b]$, $a \geq 0$.

Solución. Considere el intervalo $[0, b]$ y sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[0, b]$. Entonces $m_i = x_{i-1}$, $M_i = x_i$; por tanto,

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = x_0(x_1 - x_0) + ... + x_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$
$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - x_{i-1}) = x_1(x_1 - x_0) + x_2(x_2 - x_1) + ... + x_n(x_n - x_{n-1})$$

Para simplificar el problema considere la partición P_n en n subintervalos iguales de longitud b/n. Entonces $x_0 = 0$, $x_1 = b/n$, $x_2 = 2b/n$, ..., $x_i = ib/n$, ... Por tanto,

$$I(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{(i-1)b}{n}\right\} \cdot \frac{b}{n} = \sum_{i=1}^{n} (i - 1) \frac{b^2}{n^2}$$

Empleando la fórmula $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$, se obtiene $I(f, P_n) = \frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{b^2}{n^2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{b^2}{2}$ y $S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ib}{n}\cdot\frac{b}{n} = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{b^2}{n^2} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{b^2}{2}$.

$S(f, P_n) - I(f, P_n) = \frac{2}{n}\cdot\frac{b^2}{2}$. Si $n \to \infty$, $S(f, P_n) = I(f, P_n)$, es decir, f es integrable, e $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$. (Vea Figuras 2-7 y 2-8.)

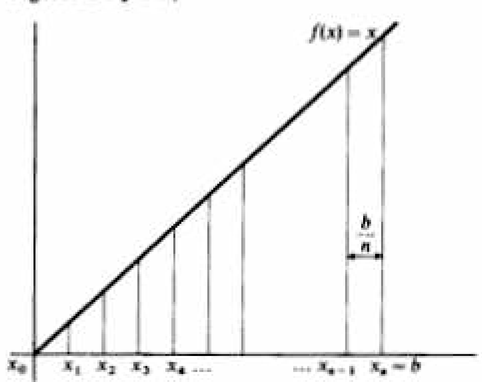


Figura 2-7

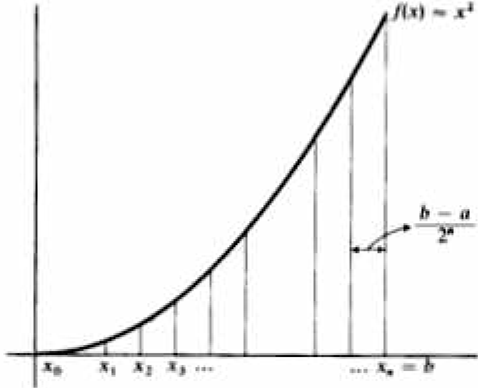


Figura 2-8

Problema 2-17 Pruebe que $f(x) = x^2$ es integrable sobre $[a, b]$ si $a \geq 0$. Calcule su integral.

Solución. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$ en 2^n subintervalos iguales. Entonces, si $\Delta x_i = (b - a)/2^n$, como f es monótona creciente sobre $[a, b]$, entonces $m_i = x_{i-1}^2$ y $M_i = x_i^2$. Por tanto,

$$S(f, P) - I(f, P) = \sum_{i=1}^{2^n} x_i^2\Delta x_i - \sum_{i=1}^{2^n} x_{i-1}^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^{2^n} (x_i^2 - x_{i-1}^2)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{2^n} (x_i^2 - x_{i-1}^2)\frac{b-a}{2^n} =$$

$$= \frac{b-a}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{b-a}{2^n}(b^2 - a^2)$$

Si $n \to \infty$, $1/2^n \to 0$ y $S(f, P) - I(f, P) \to 0$, esto muestra que f es integrable.

Ahora vamos a obtener su integral definida calculando el límite de las sumas superiores.

Sea $h = (b - a)/2^n \Rightarrow \Delta x_i = h$ y $x_i = a + ih$. Por tanto,

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{2^n} x_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^{2^n} (a + ih)^2 h = \sum_{i=1}^{2^n} (a^2h + 2ah^2 i + h^3 i^2) = a^2h\,\Sigma\,1 + 2ah^2\,\Sigma\,i + h^3\,\Sigma\,i^2 =$$

$$= a^2h2^n + ah^2 2^n(2^n + 1) + \frac{h^3 2^n(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}{6} =$$

$$= a^2(b - a) + a(b - a)^2 + \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{(b-a)^3}{6}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(2 + \frac{1}{2^n}\right)$$

Se emplearon las fórmulas $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$ y $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ahora, $\lim_{n\to\infty} S(f, P) = a^2(b - a) + a(b - a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{b-a}{3}(3a^2 + 3a(b-a) + (b-a)^2) = \frac{b^3 - a^3}{3}$ porque $1/2^n \to 0$ si $n \to \infty$.

Problema 2-18 Pruebe que:

$$a)\ \int_0^b x^3\,dx = b^4/4; \quad b)\ \int_0^b x^4\,dx = b^5/5; \quad c)\ \int_0^b x^p\,dx = b^{p+1}/(p + 1)$$

Solución. *a*) Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición con $x_i = ib/n$; entonces

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1})^3 (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^4}{n^4} \sum_{j=0}^{n-1} j^3 = \frac{b^4}{4}\left[\frac{(n-1)^4}{4} + \frac{(n-1)^3}{2} + \frac{(n-1)^2}{4}\right]$$

Análogamente, $S(f, P) = \frac{b^4}{n^4} \sum_{1}^{n} j^3 = \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right]$.

$S(f, P)$ e $I(f, P)$ se pueden hacer tan próximas a b^4/n^4 eligiendo a n suficientemente grande, y, por tanto, $S(f, P) - I(f, P)$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, eligiendo a n suficientemente grande. Esto muestra que f es integrable.

$I(f, P) \leq b^4/4 \leq S(f, P)$, y como la diferencia es tan pequeña como se quiera, este número existe, es único, y es $\int_0^b x^3\,dx$. Por tanto, $\int_0^b x^3\,dx = b^4/4$.

b) Para este caso se tiene que $I(f, P) = \frac{b^5}{n^5}\left[\frac{(n-1)^5}{5} + \frac{(n-1)^4}{2} + \frac{(n-1)^3}{3} - \frac{(n-1)}{30}\right]$ y $S(f, P) = \frac{b^5}{n^5}\left[\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right]$.

$S(f, P)$ e $I(f, P)$ se pueden hacer tan próximas a $b^5/5$ como se quiera, eligiendo a n suficientemente grande. Por tanto, $\int_0^b x^4\,dx = b^5/5$.

c) Para este caso hay que demostrar por inducción que $\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$ + términos que contienen potencias de n, menores que $p + 1$; $\sum_{k=1}^{n} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + Cn^{p-2} + \ldots \frac{\sum_1^n k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} + \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \ldots$, que se puede hacer tan próxima a $1/(p+1)$ como se quiera para n suficientemente grande.

Ahora, $I(f, P) = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\left[\sum_0^{n-1} k^p\right]$ y $S(f, P) = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\left[\sum_1^{n} k^p\right]$ y se pueden hacer tan próximas a $b^{p+1}/(p+1)$ como se quiera, eligiendo a n suficientemente grande. Entonces, $\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$

Problema 2-19 Muestre que sen x es integrable sobre $[a, b]$.

Solución. Sea P una partición de $[a, b]$ en 2^n subintervalos iguales. Si x' y x'' están en el mismo subintervalo, $|x' - x''| \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow |\text{sen } x' - \text{sen } x''| \leq \frac{b-a}{2^n}$. Entonces, si sen $\bar{x}_i$ = max sen x y sen $\underline{x}_i$ = min sen x en $[x_{i-1}, x_i]$, se obtiene $0 \leq S(\text{sen } x, P) - I(\text{sen } x, P) = \sum_{i=1}^{2^n} (\text{sen } \bar{x}_i - \text{sen } \underline{x}_i)\Delta x_i \leq \sum_1^n \frac{b-a}{2^n} \Delta x_i = \frac{b-a}{2^n} \sum_1^n \Delta x_i = \frac{(b-a)^2}{2^n}$. Esta diferencia se puede hacer tan pequeña como se quiera para n suficientemente grande. Por tanto, sen x es integrable.

Problema 2-20 Empleando el teorema de monotonía (Problema 2-14), halle los polinomios de Taylor para sen x y cos x.

Solución. Como $\cos x \leq 1 \Rightarrow \int_0^t \cos x\,dx \leq \int_0^t 1 \Rightarrow \text{sen } t\Big|_0^t \leq x\Big|_0^t \Rightarrow \text{sen } t \leq t$.

Ahora, $\text{sen } x \leq x \Rightarrow \int_0^t \text{sen } x\,dx \leq \int_0^t x \Rightarrow -\cos x\Big|_0^t \leq \frac{x^2}{2}\Big|_0^t \Rightarrow 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$.

Como $\cos x \geq 1 - x^2/2 \Rightarrow \int_0^t \cos x\,dx \geq \int_0^t \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx \Rightarrow \text{sen } t \geq t - \frac{t^3}{3!}$.

Como $\text{sen } x \geq x - x^3/3! \Rightarrow \int_0^t \text{sen } x\,dx \geq \int_0^t \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) dx \Rightarrow 1 - \cos t \geq \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!}$.

Por tanto, $\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots$ y $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

Problema 2-21 *a*) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que toda suma inferior es igual a toda suma superior? *b*) ¿Algunas sumas superiores son iguales a algunas sumas inferiores? *c*) ¿Qué funciones continuas tienen la propiedad de que todas las sumas inferiores son iguales?

Solución. *a*) Si $I(f, P) = S(f, P)$ para una partición P, entonces cada $m_i = M_i$; por tanto, f es constante en cada $[x_{i-1}, x_i]$. Como estos intervalos se superponen, f debe ser constante sobre $[a, b]$.

b) Si $I(f, P) = S(f, P)$ y P contiene a P_1 y P_2, entonces $I(f, P_1) \leq I(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P_2) = I(f, P_1)$, entonces $I(f, P) = S(f, P)$. Por *a*) se sigue que f es constante sobre $[a, b]$.

c) Solamente las funciones constantes. Porque si f no es constante sobre $[a, b]$ y si m es el valor mínimo de f sobre $[a, b]$, como $f(x) > m$ para algún x y por ser f continua se puede elegir una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $f(x) > m$ sobre algún intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces $m_i > m$. Por tanto, $I(f, P) > m(b - a)$. Si Q es la partición $Q = \{a, b\}$, entonces $I(f, Q) = m(b - a)$.

Problema 2-22 Pruebe que $\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)$.

Solución. Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ la cual da lugar a la partición $P' = \{x_0 + c, \ldots, x_n + c\}$ de $[a + c, b + c]$ y recíprocamente. Si $h(x) = f(x - c)$, entonces $m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \inf\{h(x): x_{i-1} + c \leq x \leq x_i + c\}$ y algo análogo para M_i; por tanto, $I(f, P) = I(h, P')$ y $S(f, P) = S(h, P')$.

Si f es integrable para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$ para cada partición P, entonces h es integrable puesto que $S(h, P') - I(h, P') < \varepsilon$. Además,

$$\int_a^b f = \sup\{I(f, P)\} = \sup\{I(h, P')\} = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)$$

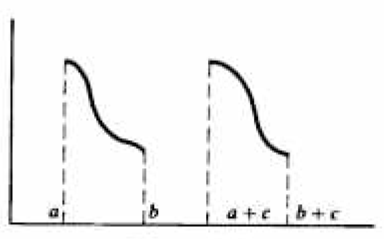


Figura 2-9

Problema 2-23 Pruebe que $\int_1^a \frac{1}{t}\,dt + \int_1^b \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt$.

Solución. Toda partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[1, a]$ da lugar a la partición $P' = \{bt_0, \ldots, bt_n\}$ de $[a, b]$ y recíprocamente. Ahora, $b \inf\left\{\frac{1}{t} : t_{i-1} \leq t \leq t_i\right\} = \inf\left\{\frac{1}{t} : bt_{i-1} \leq x \leq bt_i\right\}$.

Se tiene que $I(f, P') = \sum_1^n m_i'(bt_i - bt_{i-1}) = \sum_1^n bm_i'(t_i - t_{i-1}) = \sum_1^n m_i(t_i - t_{i-1}) = I(f, P)$; por tanto, $\int_0^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \sup\{I(f, P')\} = \sup\{I(f, P)\} = \int_1^a \frac{1}{t}\,dt$.

Problema 2-24 Pruebe que $\int_{ca}^{cb} f(t)\,dt = c\int_a^b f(ct)\,dt$.

Solución. Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y $P' = \{cx_0, \ldots, cx_n\}$, entonces

$$m_i = \inf\{f(cx) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \inf\{f(x) : cx_{i-1} \leq x \leq cx_i\} = m_i'$$

por tanto, si $h(x) = f(cx)$, entonces

$$cI(f, P') = c\sum_1^n m_i(x_i + x_{i-1}) = \sum_1^n m_i(cx_i - cx_{i-1}) = I(f, P')$$

Por tanto,

$$\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx = \sup\{I(f, P')\} = c \sup I(h, P) = c\int_a^b f(cx)\,dx$$

Problema 2-25 Si f es una función monótona sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

Solución. Suponga f creciente sobre $[a, b]$. Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $(b - a)/n$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $M_j(f) = f(x_j)$; $m_j(f) = f(x_{j-1})$.
Así, $I(f, P) = f(x_0)\dfrac{b-a}{n} + f(x_1)\dfrac{b-a}{n} + \ldots + f(x_{n-1})\dfrac{b-a}{n} = [f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})]\dfrac{b-a}{n}$.

$$S(f, P) = f(x_1)\frac{b-a}{n} + f(x_2)\frac{b-a}{n} + \ldots + f(x_n)\frac{b-a}{n} = [f(x_1) + \ldots + f(x_n)]\frac{(b-a)}{n}$$

Al restar las expresiones se obtiene:

$$S(f, P) - I(f, P) = [f(x_n) - f(x_0)]\frac{b-a}{n} = \frac{[f(b) - f(a)](b-a)}{n} \quad \text{porque } x_0 = a \text{ y } x_n = b$$

Sea $\varepsilon > 0$ y como $n > \dfrac{[f(b) - f(a)](b-a)}{\varepsilon}$, entonces $\dfrac{[f(b) - f(a)](b-a)}{n} < \varepsilon$. Por tanto, $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$. Esto muestra que f es integrable.

Problema 2-26 Pruebe que $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = \dfrac{c-a}{b-a}\,\dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^c f + \dfrac{b-c}{b-a}\,\dfrac{1}{b-c}\displaystyle\int_c^b f$, si f es continua sobre $[a, b]$ y $a \le c \le b$.

Solución. $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = \dfrac{1}{b-a}\left[\int_a^c f + \int_c^b f\right] = \dfrac{1}{b-a}\left[\dfrac{c-a}{c-a}\int_a^c f + \dfrac{b-c}{b-c}\int_c^b f\right] =$

$$= \frac{c-a}{b-a}\,\frac{1}{c-a}\int_a^c f + \frac{b-c}{b-a}\,\frac{1}{b-c}\int_c^b f$$

Problema 2-27 *Definición.* Una función es seccionalmente monótona sobre $[a, b]$ si, y solamente si, existe una partición de $[a, b]$ tal que f sea monótona en cada intervalo abierto $]x_{j-1}, x_j[$ $j = 1, \ldots, n$. Vea si la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ es integrable.

Solución. La función f tiene los valores que indica la siguiente tabla para x dado:

x	1	1/2	1/3	1/4	1/5	…	1/100	…	2	1	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	2/9
$f(x)$	0	0	0	0	0	…	0	…	1	0	−1	0	1	0	−1	1

La función f es monótona sobre $[2/3, 2]$ y seccionalmente monótona sobre $[1/4, 2]$ y en cualquier intervalo cerrado que no contenga a 0. La función f no es monótona sobre $[1/4, 2]$ y no es seccionalmente monótona sobre $[0, 2]$. Cualquier intervalo cerrado que contenga a 0 contiene infinitos puntos $1/n$ o $-1/n$, y f es creciente sobre $[1/(n + 1), 1/n]$. Entonces f es decreciente sobre $[1/(n + 2), 1/n + 1]$ y creciente sobre $[1/(n + 3), 1/(n + 2)]$, etc. Entonces f no es seccionalmente monótona sobre $[0, 1]$.

Como cualquier entorno de cero, al cual no pertenece cero, contiene números x para los cuales $f(x) = 1$, y números x' para los cuales $f(x') = -1$ porque $f(x) = 1$ para $x = 2/1, 2/5, 2/9, \ldots$, y $f(x) = -1$ para $x = 2/3, 2/7, 2/11, \ldots$, y todo entorno de cero contiene infinidad de puntos de ambos tipos, entonces f no es continua en 0. Por consiguiente, f no es seccionalmente monótona ni continua sobre $[0, 1]$; a pesar de esto, f es integrable sobre $[0, 1]$. Esto no lo podemos concluir por ninguno de los problemas anteriores.

Problema 2-28 Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

Solución. Sea f continua sobre $[a, b]$ y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ en n subintervalos iguales y de longitud $(b - a)/n$. Como f es continua en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, $M_j = \sup f([x_{j-1}, x_j]) = f(x_j')$ para algún $x_j' \in [x_{j-1}, x_j]$. Esto es debido a que si una función tiene un valor máximo $f(x_0)$ en un intervalo I, entonces $f(x_0) = \sup$ de $f(I)$. Análogamente, $m_j = \inf f([x_{j-1}, x_j]) = f(x_j'')$ para algún $x_j'' \in [x_{j-1}, x_j]$.

De lo anterior, $S(f, P) - I(f, P) = \sum_1^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_1^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_1^n [M_j - m_j](x_j - x_{j-1}) = \sum_1^n [f(x_j') - f(x_j'')](x_j - x_{j-1})$; $j = 1, \ldots, n$. Como f es uniformemente continua sobre $[a, b]$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ si $|x' - x''| < \delta$. Si P es una partición regular de $[a, b]$, entonces para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $(x_j - x_{j-1}) < \delta$ cuando $n > (b - a)/\delta$. Como $x_j', x_j'' \in [x_{j-1}, x_j]$ y para tal n y δ se tiene que $|x_j' - x_j''| < \delta$. Entonces $|f(x_j') - f(x_j'')| < \varepsilon$ para $j = 1, \ldots, n$. Por tanto, $S(f, P) - I(f, P) < \sum_1^n \varepsilon(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon(b - a)$. Sea $\varepsilon' > 0$ y $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{b - a}$, entonces $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon(b - a) = \frac{\varepsilon'}{b - a}(b - a) = \varepsilon'$; por tanto, f es integrable.

Problema 2-29 Sea $f(x) = x/(x - 1)$. *a)* ¿Por qué no es integrable sobre $[0, 2]$? *b)* ¿Es integrable $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$ sobre el intervalo $[-5, 15]$?

Solución. *a)* f es continua sobre $[0, 2]$, excepto en $x = 1$; f no es integrable sobre $[0,2]$ porque no es acotada en este intervalo.

b) f sí es integrable sobre $[-5, 15]$, puesto que es continua en este intervalo.

Problema 2-30 (Teorema del valor medio para integrales.) Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces existe $x \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)\, dx = f(\bar{x})(b - a)$.

Solución. Si $a = b$, el teorema es verdadero porque todos los términos son cero. Si $a < b$, sea $m = f(x_1)$ y $M = f(x_2)$ el mínimo y máximo de f sobre $[a, b]$, respectivamente. Como f es continua, los valores extremos existen. Entonces $f(x_1)(b - a) \leq \int_a^b f \leq f(x_2)(b - a)$ y como $b - a > 0$, entonces $f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f}{b - a} \leq f(x_2)$.

Por ser f continua, según el T.V.M. (teorema del valor medio), existe $\bar{x}$ entre x_1 y x_2 tal que $\frac{\int_a^b f}{b - a} = f(\bar{x})$.

Problema 2-31 (Primer teorema fundamental.) Si f es continua sobre $[a, b]$, defina a $G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Solución. Sea $h > 0$. Si x y $x + h$ están en $[a, b]$, entonces $\int_a^{x+h} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt$. Esto se puede escribir como $G(x + h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)\, dt$. Según el T.V.M. para integrales $\int_x^{x+h} f(t)\, dt = hf(\bar{t})$ para algún $\bar{t} \in [x, x + h]$. Así, para algún $\bar{t} \in [x, x + h]$, $\frac{G(x + h) - G(x)}{h} = f(\bar{t})$. Por un razonamiento análogo si $h < 0$, halle que $\frac{G(x + h) - G(x)}{h} = f(\bar{t})$ para algún $\bar{t} \in [x, x + h]$. Como f es continua en x, $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$. Por tanto, si $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ si $|t - x| < \delta$.

Ahora, si $0 < |h| < \delta$, entonces como $\bar{t}$ está entre x y $x + h$, $|\bar{t} - x| < \delta$ y $|f(\bar{t}) - f(x)| < \varepsilon$.

Es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\left| \frac{G(x + h) - G(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$ si $0 < |h| < \delta$, que es la definición de $\lim_{h \to 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} = f(x)$; por tanto, $G'(x) = f(x)$.

Problema 2-32 (Segundo teorema fundamental.) Sea f integrable sobre $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. (Regla de Barrow.)

Solución. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Además,

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + ... + [F(x_j) - F(x_{j-1})] + ... + [F(x_n) - F(x_{n-1})]$$

Como F es derivable en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, es continua también. Aplicando el T.V.M. a F en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, vemos que para cada $j = 1, 2, ..., n$ existen números $\bar{x}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tales que $F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\bar{x}_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\bar{x}_j)(x_j - x_{j-1})$ porque $F'(x) = f(x)$. Para cada j, $m_j \le f(\bar{x}_j) \le M_j$ porque $f(\bar{x}_0) \in f([x_{j-1}, x_j])$ cuyo extremo inferior es m_j y su extremo superior M_j.

Así, $\sum_1^n m_j(x_j - x_{j-1}) \le \sum_1^n f(\bar{x}_j)(x_j - x_{j-1}) \le \sum_1^n M_j(x_j - x_{j-1}) \Leftrightarrow I(f, P) \le \sum F(x_j) - F(x_{j-1}) \le S(f, P)$, que equivale a $I(f, P) \le F(b) - F(a) \le S(f, P)$, que es verdadera para todas las particiones P. $F(b) - F(a)$ es un extremo superior del conjunto I^* de todas las sumas inferiores de f sobre $[a, b]$ y un extremo inferior del conjunto S^* de todas las sumas superiores de f sobre $[a, b]$.

Por definición de infimum y supremum de un conjunto $\inf I^* \le F(b) - F(a) \le \sup S^*$, que equivale a $\int_a^b f \le F(b) - F(a) \le \int_a^b f$ y, por tanto, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Problema 2-33 Si f es integrable sobre $[a, b]$ y si existe F tal que $F' = f$, $\forall x \in [a, b]$, entonces $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Solución. Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ definida para $\forall x \in [a, b]$. El teorema fundamental aplicado al intervalo $[a, x]$ dice que $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

Como $\frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, entonces $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

Problema 2-34 *a*) Halle $(f^{-1})'(0)$ si $f(x) = \int_0^x \text{sen}\,(\text{sen}\, t)\,dt$. *b*) Halle $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$.

Solución. *a*) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(0)]} = \frac{1}{\text{sen}\,[\text{sen}\,(f^{-1}(0))]} = \frac{1}{\text{sen}\,[\text{sen}\,(1)]}$.

b) $F(x) = x\int_0^x f(t)\,dt$, por tanto, $F'(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)\,dt$.

Problema 2-35 Pruebe que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x - u)\,du = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)\,dt\right] du$$

Solución. Si $F(x) = \int_0^x f(u)(x - u)\,du = \int_0^x xf(u)\,du - \int_0^x uf(u)\,du$, entonces $F'(x) = [xf(x) + \int_0^x f(u)\,du] - xf(x)$, por el problema anterior es igual a $\int_0^x f(u)\,du$. Por tanto, existe un número c tal que $\int_0^x f(u)(x - u)\,du = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)\,dt\right] du + c$, para todo x, $c = 0$, porque los otros dos términos son 0 para $x = 0$.

Problema 2-36 Use el problema anterior para mostrar que

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2\,du = 2\int_0^x \left[\int_0^{u_2}\left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right)du_1\right] du_2$$

Solución. Aplicando el problema anterior a $g(u) = f(u)(x-u)$, se obtiene

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2\,du = \int_0^x [f(u)(x-u)](x-u)\,du = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)(x-t)\,dt\right] du$$

Por tanto, debemos mostrar que

$$\int_0^x \left[\int_0^u f(t)(x-t)\,dt\right] du = 2\int_0^x \left[\int_0^{u_2}\left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right)du_1\right] du_2$$

Para la primera integral de la derecha se tiene que

$$\int_0^u f(t)(u-t)\,dt = \int_0^u \left[\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right] du_1 \tag{1}$$

Además, $x - t = (u - t) + (x - u)$; por tanto,

$$\int_0^u f(t)(x-t)\,dt = \int_0^u f(t)(u-t)\,dt + \int_0^u f(t)(x-u)\,dt \tag{2}$$

La segunda integral de la derecha se puede escribir

$$\int_0^u f(t)(x-u)\,dt = (x-u)\int_0^u f(t)\,dt \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) se obtiene

$$\int_0^x \left[\int_0^u f(t)(x-t)\,dt\right] du = \int_0^x \left[\int_0^u \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1\right] du + \int_0^x \left[(x-u)\int_0^u f(t)\,dt\right] du$$

Aplicando el problema anterior a $g(u) = \int_0^u f(t)\,dt$ se obtiene

$$\int_0^x \left[(x-u)\int_0^u f(t)\,dt\right] du = \int_0^x \left[\int_0^u \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1\right] du$$

Problema 2-37 Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x \text{ racional y } p/q \text{ irreducible.} \end{cases}$

Muestre que f es integrable sobre $[0,1]$ y que $\int_0^1 f = 0$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$; elija a n tal que $1/n < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$ puntos racionales p/q en $[0,1]$ con $q < n$. Elija una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ tal que los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ que contienen algún x_j tengan una longitud total $< \frac{\varepsilon}{2}$. Sobre cada uno de estos intervalos se tiene que $M_i \leq 1/n < \frac{\varepsilon}{2}$. I_1 representa todos los i de $1, 2, \ldots, n$ para los cuales $[t_{i-1}, t_i]$ contiene algún x_j y sea I_2 los demás i de $1, 2, \ldots, n$. Como $f \leq 1$ se tiene que

$$S(f,P) = \sum_{i\in I_1} M_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i\in I_2} M_i(t_i - t_{i-1}) \leq 1\sum_{i\in I_1}(t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i\in I_2}(t_i - t_{i-1}) \leq 1\cdot\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 = \varepsilon$$

Problema 2-38 Halle dos funciones integrables f y g y tal que $g \circ f$ no lo sea.

Solución. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x \text{ es irracional} \\ 1/q, & \text{si } x = p/q \text{ es irreducible} \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$, entonces

$$g \circ f = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

Problema 2-39 (Segundo teorema del valor medio, generalizado para integrales.) Suponga que f es continua sobre $[a, b]$ y g integrable y no negativa sobre $[a, b]$. Pruebe que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$ para algún $c \in [a, b]$.

Solución. De la desigualdad $m \leq f \leq M$, entonces $mg \leq gf \leq Mg$ porque g no es negativa. Entonces $m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$. Por tanto, $\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$ para algún μ con $m \leq \mu \leq M$. $\mu = f(c)$ para algún $c \in [a, b]$. $\therefore$ $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.

Problema 2-40 Suponga que f y g son integrables sobre $[a, b]$. *a*) Pruebe la desigualdad de Cauchy-Schwartz. $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$.

b) Si se verifica la igualdad, ¿es verdad que $g = \lambda f$ para algún λ? ¿Qué sucede si f y g son continuas?

c) Muestre que la desigualdad de Schwartz es un caso especial de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

d) Pruebe que $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2\right)$. ¿Sigue siendo verdadero el resultado si 0 y 1 se remplazan por a y b?

Solución. *a*) Si $g = 0$ la igualdad se verifica. De otra manera

$$0 \leq \int_a^b (f - \lambda g)^2 = \int_a^b f^2 - 2\lambda \int_a^b fg + \lambda^2 \int_a^b g^2. \quad \therefore \quad \int_a^b f^2 - \frac{4\left(\int_a^b fg\right)^2}{4\int_a^b g^2} \geq 0$$

b) Si $f = g$, excepto en un punto, la desigualdad se verifica, aunque $f = \lambda g$ es falsa. Si f y g son continuas y $g \neq 0$, entonces $f = \lambda g$ para algún λ, porque si $f \neq \lambda g$ para todo λ, entonces

$$0 < \int_a^b (f - \lambda g)^2 = \int_a^b f^2 - 2\lambda \int_a^b fg + \lambda^2 \int_a^b g^2$$

Como $(f - \lambda g)^2$ es continua y no negativa es positiva en algún punto. Esto implica la desigualdad estricta.

c) Dado $x_1, \ldots, x_n$, y, $y_1, \ldots, y_n$, sean f y g definidas sobre $[0, 1]$ por $f(x) = \begin{cases} x_i, & \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n} \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

y $g(x) = \begin{cases} y_i, & \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n} \\ 0, & x = 1 \end{cases}$. Entonces $\int_0^1 fg = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i y_i$ y $\int_0^1 f^2 = \frac{1}{n^2} \sum_1^n x_i^2$, $\int_0^1 g^2 = \frac{1}{n^2} \sum_1^n y_i^2$.

Por tanto, $(\Sigma\, x_i y_i)^2 \leq (\Sigma\, x_i^2)(\Sigma\, y_i^2)$, que es la desigualdad de Schwartz.

d) Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwartz a f y $g(x) = 1$ sobre $[0, 1]$. El resultado anterior correcto para $[a, b]$ es $\left(\int_a^b f\right)^2 \leq (b - a)\int_a^b f^2$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Muestre que: *a)* $0 \le \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \le \pi$; *b)* $5 \le \int_0^2 x^4\, dx \le 10$; *c)* $1/2 \le \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx \le 1$.

2. Haciendo un grafo aproximado de $f(x) = 1/x$ sobre papel milimetrado: *a)* calcule $\int_1^6 \frac{dx}{x}$; *b)* aproxime analiticamente $\int_1^6 \frac{dx}{x}$ empleando la partición $P = \{1; 1{,}25; 1{,}5; 1{,}75; 2; 2{,}25; 2{,}5; 3, 4, 5, 6\}$ y una tabla de inversos. *Resp.:* *b)* 1,8.

3. Subdivida $[0, 1]$ en 10 subintervalos iguales y aproxime: *a)* $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$; *b)* $\ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x}$.

4. Halle la derivada de:

a) $F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\, dt$

b) $F(x) = \int_3^{\int_1^x \operatorname{sen}^3 t} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^6 t + t^2}$

c) $F(x) = \int_x^b \frac{dt}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}$

d) $F(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\, dt\right) dy\right)$

Resp.: *a)* $(\operatorname{sen}^3 x^3)3x^2$; *b)* $\frac{1}{1 + \operatorname{sen}^6\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt\right) + \left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt\right)^2} \operatorname{sen}^3 x$; *c)* $\frac{-1}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x}$

5. Para las siguientes funciones si $F(x) = \int_0^x f$, ¿en qué puntos x es $F'(x) = f(x)$? Hay casos en que $F'(x) = f(x)$, aunque f no sea continua. *a)* $f(x) = 0$ si $x < 1$, $f(x) = 1$ si $x \ge 1$; *b)* $f(x) = 0$ si x es irracional, $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ es irreducible; *c)* $f(x) = 0$ si $x \le 0$ y $f(x) = 1/[1/x]$ si $x \ge 0$.

Resp.: *a)* Todos los $x \ne 1$; *b)* todos los x irracionales; *c)* todos los x de la forma $1/n$ para algún entero natural n.

6. Empleando el primero y segundo teorema fundamental del cálculo integral, halle las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^3 2(x^3 + 4)\, dx$; *b)* $\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx$; *c)* $\int_0^\pi D_t\{\cos^3 t\}\, dt$; *d)* $\int_0^8 x^{13}\, dx$; *e)* $\int_{-1}^3 1/x^3\, dx$

Resp.: *a)* 72; *b)* $\frac{1}{2}$; *c)* -2; *d)* $\frac{8^{14}}{14}$; *e)* la integral no está definida.

7. Muestre que si f es continua sobre $[a, b]$ y $f = (F' \circ g)g'$ sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^b (F' \circ g)g' = F[f(b) - F(g(a))]$$

8. Muestre que $\int_a^b \frac{2x}{1 + x^2}\, dx = \int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{du}{u}$.

Indicación. Sea $F(t) = \int_1^t \frac{du}{u}$, $t > 0$. Entonces $D_x[F(1 + x^2)] = \frac{2x}{1 + x^2}$ para todo x.

9. Halle el valor medio de las siguientes funciones sobre los intervalos dados: *a)* $f(x) = x^2$; $[-1, 4]$; *b)* $\cos x/2$, $[-\pi, \pi]$; *c)* $f(x) = x(1 + x^2)^4$, $[-1, 1]$; *d)* $\cos^2 x$, $[0, 2\pi]$; *e)* $f(\theta) = A^2 \cos \omega\theta$, $[0, 2\pi/\omega]$. *Resp.:* *a)* $\frac{13}{3}$; *b)* $\frac{2}{\pi}$; *c)* 0; *d)* $\frac{1}{2}$; *e)* 0.

10. ¿Qué hay equivocado en la siguiente integración?: $\int_0^\pi \sec^2 x\, dx = \int_0^\pi D(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x \Big|_0^\pi = 0$.

11. Suponga que f es continua sobre $]-\infty, \infty[$ y que g es derivable sobre $\mathbf{R}$.

a) Muestre que $D_t\left[\int_c^{g(t)} f\right] = g'(t)f[g(t)] = [(f \circ g)g'](t)$, $t \in\,]-\infty, \infty[$.

b) Con la hipótesis adicional de que g' es continua sobre $]-\infty, \infty[$; muestre que

$$\int_a^t (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(t)} f,\ t \in\,]-\infty, \infty[$$

12. Muestre que $\int_0^t \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int_1^{1+t^2} \frac{du}{u}$.

13. Si f es una función continua sobre un intervalo I, muestre que para cada $t \in I$, $\int_{-t}^{0} f(x)\,dx = \int_0^t f(-x)\,dx$.
Indicación. Muestre que $\int_0^t f(-x)\,dx = -\int_0^{-t} f$.

14. Pruebe que $\int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x\,|x|$ para todo x real.

15. Una función es continua en todas partes y satisface la ecuación $\int_0^x f(t)\,dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$ para todo x. Calcule $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
Resp.: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \pi$.

16. Existe una función f, definida y continua para todo x real, y que satisface la ecuación $\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$, con c una constante. Halle la fórmula explícita que da a $f(x)$ y el valor de c.
Resp.: $f(x) = 2x^{15}$; $c = -\frac{1}{9}$.

17. Sin calcular la integral calcule $f'(x)$ si f está definida por la fórmula $f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt$.
Resp.: $\frac{2x^{13}}{1+x^8} - \frac{3x^{20}}{1+x^{12}}$

18. Halle $f(2)$ si f es continua y satisface la fórmula para todo $x \geq 0$, $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\,dt = x$.
Resp.: $f(2) = \frac{1}{5}$.

19. Empleando el teorema de linealidad calcule: *a)* $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 4x \cos 3x\,dx$; *b)* $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 4x\,dx$; *c)* $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 4x\,dx$.
Resp.: *a)* 0; *b)* π; *c)* π.

20. Aplique $\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a)$ para mostrar que para cualquier entero positivo n:

$$a)\ \left|\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^n dx\right| \leq \frac{\pi}{3.2^{n+1}};\quad b)\ \left|\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^n x\,dx\right| \leq \frac{\pi}{3.2^{n+1}}.$$

21. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \leq x < c \\ k \text{ si } x = c \\ 1 \text{ si } c < x \leq b \end{cases}$. Pruebe que $f(x)$ es integrable y que $\int_a^b f(x)\,dx = b - c$, independiente del valor k.

22. Pruebe que si f es integrable y no negativa sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.

23. Dé un ejemplo de dos funciones cuya suma sea integrable y que ninguna de las dos sea integrable.
Resp.: La función $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional} \end{cases}$ y su opuesta no son integrables. Pero la suma de las dos funciones es cero y, por tanto, integrable.

24. Pruebe que si f es continua y par sobre $[-a, a]$, entonces $\int_{-a}^{0} f = \int_0^a f = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f$.

25. Verifique que $\int_0^1 x^m(1-x)^n = \int_0^1 x^n(1-x)^m$.

26. Pruebe que si f es continua sobre $[0, 1]$, entonces $\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x) = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)$.

27. Pruebe que si $\int_0^{\pi/2} \cos^n x = I$ con I la del Ejercicio 25.

28. Pruebe que si f es periódica y continua en $]-\infty, \infty[$ de periodo ω, entonces $\int_a^{a+\omega} f = \int_0^{\omega} f$, a un número arbitrario.

29. Pruebe que si f es continua en $[0, 1]$, entonces $\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x) = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)$.

CAPITULO 3

Funciones definidas por una integral. Función primitiva y aplicaciones. Integrales inmediatas

Si nos hacemos la pregunta: ¿Qué debemos saber con relación a la función f definida en el intervalo $[a, b]$ para que f sea la derivada de alguna función F definida sobre $[a, b]$?, y si consideramos la función

$$\begin{cases} f(x) = 0 & (-1 \leq x < 0), \\ f(x) = 1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

vemos que no es la derivada de ninguna función definida en el intervalo $[-1, 1]$.

A continuación vamos a mostrar que si f es una función continua sobre el intervalo $[a,b]$, entonces existe una función F sobre $[a,b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Es decir, la continuidad sobre $[a, b]$ es una condición suficiente para que una función tenga derivada sobre el intervalo $[a,b]$. Sin embargo, existen funciones que son continuas y cuya derivada no es continua. Por ejemplo, la función

$$\begin{cases} g(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, \; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Esto nos dice que la continuidad no es una condición necesaria.

El siguiente teorema dice que toda función continua sobre un intervalo admite primitiva. También permite expresar integrales de una función continua por medio de una función primitiva que no siempre se conoce.

Primer teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y la aplicación $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, entonces es derivable en $[a, b]$. Además, para todo x de $[a, b]$, se tiene $F'(x) = f(x)$.

Demostración. En efecto, para todo x y $x + h$ en $[a,b]$:

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt, \; h \neq 0$$

Aplicando la fórmula de la media, existe $\xi \in [x, x+h]$ tal que $F(x+h) - F(x) = hf[\xi]$. Cuando h tiende a cero, ξ tiende a x y, por consiguiente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Por tanto, $F'(x) = f(x)$.

Definición. Sea f una función real definida sobre un intervalo cualquiera $[a, b]$ $(a < b)$. Se dice que la función real F definida y derivable sobre $[a,b]$ es primitiva de f si para todo x tal que $a < x < b$ se tiene $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo. Sobre el intervalo $]-\infty, +\infty[$ la función $F(x) = x^2$ es primitiva de la función $f(x) = 2x$, porque F es derivable sobre $]-\infty, +\infty[$ y verifica $(x^2)' = 2x$.

Nota. La definición implica que la primitiva F es una función continua sobre $[a, b]$, puesto que es derivable en cada uno de sus puntos.

El siguiente teorema nos dice qué funciones determinan el conjunto de funciones primitivas de una función f que admite una primitiva.

Teorema. Si f admite una primitiva g en el intervalo $[a,b]$, entonces f admite la familia de primitivas $g + h$, siendo k una constante.

Demostración. En efecto, si g es una primitiva de f y k una constante real, entonces

$$(g + k)' = g' = f$$

En consecuencia, $g + k$ es una primitiva de f para todo $k \in \mathbf{R}$. Recíprocamente, si h es una primitiva cualquiera de f, entonces

$$h' = g' \Rightarrow (h - g)' = 0; \quad h - g = k$$

k una constante. Entonces toda primitiva de f pertenece a la familia $g + k$ $(k \in \mathbf{R})$.

Segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y si

$$\phi'(x) = f(x), \ (a \le x \le b) \tag{3-1}$$

entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$.

Demostración. Si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces, según el primer teorema fundamental del cálculo,

$$F'(x) = f(x), \ (a \le x \le b) \tag{3-2}$$

De (3-1) y (3-2) vemos que $F'(x) = \phi'(x)$ para todo x de $[a,b]$. Entonces, según el teorema anterior, $F(x) = \phi(x) + C$, $(a \le x \le b)$, C una constante. Por tanto, $F(b) - F(a) = [\phi(b) + C] - [\phi(a) + C] = \phi(b) - \phi(a)$.

Pero $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Así, $F(b) = \phi(b) - \phi(a)$. Como $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$, el teorema queda demostrado.

Este teorema permite calcular la integral de f si se conoce una primitiva ϕ de f.

Ejemplos. Todas las funciones elementales estudiadas anteriormente definen primitivas de las funciones derivadas correspondientes. Se dan en la siguiente tabla:

Intervalo de definición	Función derivada	Función primitiva
$]-\infty, +\infty[$	$x^m (m \geq 0$ y entero$)$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$
$]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$	$x^m (m < -1$ y entero$)$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$
$]0, +\infty[$	$x^\alpha (\alpha$ real $\neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$	x^{-1}	$\ln \lvert x \rvert$
$]-\infty, +\infty[$	e^x	e^x
$]-\infty, +\infty[$	$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$]-\infty, +\infty[$	$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$]-\infty, +\infty[$	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}[$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$]k\pi, (k+1)\pi[$	$-(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = -1/\operatorname{sen}^2 x$	$\operatorname{cotg} x$
$]-1, 1[$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{arc\,sen} x$
$]-1, 1[$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{arc\,cos} x$
$]-\infty, +\infty[$	$1/(1+x^2)$	$\operatorname{arc\,tg} x$
$]-\infty, +\infty[$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$]-\infty, +\infty[$	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$]-\infty, +\infty[$	$1 - \operatorname{tgh}^2 x = 1/\cosh^2 x$	$\operatorname{tgh} x$
$]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$	$1 - \operatorname{cotgh}^2 x = -1/\operatorname{senh}^2 x$	$\operatorname{cotgh} x$
$]-\infty, +\infty[$	$1/\sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{Arg\,senh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$]1, +\infty[$	$1/\sqrt{x^2-1}$	$\operatorname{Arg\,cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$]-\infty, -1[$	$1/\sqrt{x^2-1}$	$\ln \lvert x + \sqrt{x^2-1} \rvert$
$]-1, 1[$	$1/(1-x^2)$	$\operatorname{Arg\,tgh} x = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
$]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$	$1/(1-x^2)$	$\dfrac{1}{2} \ln \left\lvert \dfrac{1+x}{1-x} \right\rvert$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 3-1 Halle $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$.

Solución. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx = a\int x^2\, dx + b\int x\, dx + c\int dx = \dfrac{ax^3}{3} + \dfrac{bx^2}{2} + cx + d.$

Problema 3-2 Halle $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

Solución. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-1/2}\, d(5x-2) = \frac{1}{5}\,\frac{(5x-2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C.$

Problema 3-3 Halle $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$

Solución. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C.$

Problema 3-4 Halle $\int x^2 e^{x^3}\,dx.$

Solución. $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$

Problema 3-5 Halle $\int \frac{x\,dx}{x^2-5}.$

Solución. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2-5} = \frac{1}{2}\ln(x^2-5) + C.$

Problema 3-6 Integrar $\int x \cos 3x\, dx$ derivando un producto.

Solución. Si se considera a x sen $3x$, entonces

$$(x \operatorname{sen} 3x)' = x(3\cos 3x) + \operatorname{sen} 3x$$

Como hay un factor 3 que no se necesita, entonces dividimos por 3:

$$\left(\frac{1}{3}x \operatorname{sen} 3x\right)' = x\cos 3x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \tag{1}$$

Para eliminar el término $\frac{1}{3}$ sen $3x$ se deriva una primitiva de $\frac{1}{3}$ sen $3x$ y se cambia de signo:

$$\left(\frac{1}{9}\cos 3x\right)' = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \tag{2}$$

Sumando (1) y (2) se obtiene: $\frac{1}{3}x \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{9}\cos 3x$, que es una primitiva de $x\cos 3x$.

Problema 3-7 Halle $\int x^4 \operatorname{sen} 2x\, dx.$

Solución. Derivando, tenemos que

$$\left(-\frac{1}{2}x^4\cos 2x\right)' = x^4 \operatorname{sen} 2x - 2x^3\cos 2x \tag{1}$$

$$(x^3 \operatorname{sen} 2x)' = 3x^2 \operatorname{sen} 2x + 2x^3 \cos 2x \tag{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}x^2\cos 2x\right)' = -3x^2 \operatorname{sen} 2x + 3x\cos 2x \tag{3}$$

$$\left(-\frac{3}{2}x \operatorname{sen} 2x\right)' = -\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x - 3x\cos 2x \tag{4}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\cos 2x\right)' = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x \tag{5}$$

Sumando, tenemos que la primitiva pedida es

$$-\frac{1}{2}x^4\cos 2x + x^3 \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{2}x^2\cos 2x - \frac{3}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{3}{4}\cos 2x + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Empleando la tabla, halle las siguientes integrales y compruebe su respuesta por derivación:

1. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a+bx}.$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}.$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arc\,tg} 2x}}{1+4x^2}\,dx.$

8. $\displaystyle\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx.$

9. $\displaystyle\int e^{-(x^2+1)}\,dx.$

10. $\displaystyle\int x\cdot 7^{x^2}\,dx.$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(a+bx)\,dx.$

12. $\displaystyle\int \sec^2(ax+b)\,dx.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{a}}.$

14. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos x^2}.$

15. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}\frac{x}{a-b}\,dx.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}.$

17. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 6x\cos 6x\,dx.$

18. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}\,dx.$

19. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^2 x\,dx.$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x}.$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x\cosh x}.$

22. $\displaystyle\int \operatorname{cotgh} x\,dx.$

23. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx.$

24. $\displaystyle\int a^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx.$

25. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}.$

26. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx.$

27. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen} x^2}.$

28. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}.$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}.$

30. $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx.$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax\cos bx}.$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}.$

33. $\displaystyle\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

34. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec x\operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x+1}}\,dx.$

36. $\displaystyle\int \operatorname{tg}\sqrt{x-1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}.$

39. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx.$

40. $\displaystyle\int x^2\cosh(x^3+3)\,dx.$

CAPITULO 4

Fórmula del cambio de variable

Las integrales comúnmente se pueden calcular por el método de sustitución o «cambio de variable». El siguiente teorema establece la fórmula que permite hacer este cambio.

Teorema. Sea g una función definida sobre el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y g' continua sobre $[a,b]$. Sea $A = g(a)$, $B = g(b)$. Entonces, si f es una función continua sobre el intervalo $g([a,b])$, se tiene

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_a^b f[g(u)]g'(u)\,du$$

Demostración. Como f es una función continua sobre el intervalo cerrado y acotado $g([a,b])$, según el primer teorema fundamental del cálculo existe una función F tal que

$$F'(x) = f(x), \quad x \in g([a,b])$$

Sea $G(u) = F[g(u)]$ para $a \leq u \leq b$. Entonces, según la derivada de una función compuesta

$$G'(u) = F'[g(u)]g'(u) = f[g(u)]g'(u), \; a \leq u \leq b$$

Empleando el segundo teorema fundamental del cálculo se obtiene

$$\int_a^b f[g(u)]g'(u)\,du = \int_a^b G'(u)\,du = G(b) - G(a) = F[g(b)] - F[g(a)] = F(B) - F(A) =$$
$$= \int_A^B F'(x)\,dx = \int_A^B f(x)\,dx$$

Lo cual demuestra el teorema.

Por ejemplo, sea f cualquier función continua sobre $[0,1]$. Entonces, con $g(u) = \operatorname{sen} u$ se tiene $g(0) = 0$, $g(\pi/2) = 1$. Como $g'(u) = \cos u$ es continua en $[0, \pi/2]$ y como f es continua en $g([0, \pi/2]) = [0,1]$, aplicando el teorema anterior se obtiene

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} u)\cos u\,du$$

Observe que $g(\pi) = 0$, $g(9\pi/2) = 1$. Como g' es continua sobre $[\pi, 9\,\pi/2]$, también se tiene que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_\pi^{9\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} u)\cos u\,du$$

si f es continua sobre $[-1, 1]$, que es la imagen de $[\pi, 9\,\pi/2]$ por g.

Ejemplo. Si $f(x) = \sqrt{x}$, la expresión

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} u} \cos u \, du$$

es verdadera. Sin embargo,

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \int_\pi^{9\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{sen} u} \cos u \, du$$

no tiene sentido, porque $\sqrt{x}$ no está definida en $-1 < x < 0$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 4-1 Halle $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2\, dx}$.

Solución. Vamos a efectuar un cambio de variable para remplazar la función que se va a integrar: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $[a, b] = [0, 1]$ por una función más simple y de la cual se puede obtener una primitiva con facilidad. Para eso considere la función $g(t) = \operatorname{sen} t$, y $[A, B] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se obtiene $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1]$ con $g(0) = 0$ y $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Además $f \circ g(t) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \cos t$; $g'(t) = \cos t$. La fórmula del cambio de variables da

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$$

Como $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$, entonces la integral que se va a calcular es igual a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2t\, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Problema 4-2 Si x es un real cualquiera halle $\int_0^x \dfrac{ds}{a^2 + s^2}$, $a \neq 0$ y fijo.

Solución. Una transformación posible es $s = at$, de donde $ds = a\,dt$. La función $t \to s(t)$ admite una función recíproca sobre el intervalo $]-\infty, +\infty[$ y es $s \to t = s/a$, la cual permite calcular los extremos del intervalo de integración

$$\int_0^x \frac{ds}{a^2 + s^2} = \int_0^{x/a} \frac{a\,dt}{a^2 + a^2 t^2} = \frac{1}{a}\int_0^{x/a} \frac{dt}{1 + t^2}$$

Como se conoce una primitiva de la función $t \to \dfrac{1}{1 + t^2}$, la integral es

$$\frac{1}{a}\int_0^{x/a} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \operatorname{arc\,tg} 0\right] = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$$

Problema 4-3 Sea F la primitiva de una función f continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$; $F(x) = \int f(x)\, dx$. Sea g un homeomorfismo derivable de $[A, B]$ sobre $[a, b]$. Muestre que $F = (F \circ g) \circ g^{-1}$ y halle una primitiva de $F(x) = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$, $[a, b] = [-1, 1]$.

Solución. *a*) La compuesta $F \circ g$ es derivable y además

$$(F \circ g)' = (f \circ g)g'$$

Entonces $F \circ g(t) = \int (f \circ g)(t) g'(t)\, dt, \ \forall t \in [A, B]$.

Como g es un homeomorfismo, g^{-1} existe, y, por consiguiente, la primitiva F está dada por $F = (F \circ g) \circ g^{-1}$.

b) Sea g la función $x = \operatorname{sen} t$, $[A, B] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. g es un homeomorfismo derivable de $[A, B]$ sobre $[a, b]$. Entonces

$$F \circ g(t) = \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\, \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t)$$

La función recíproca g^{-1} es $t = \operatorname{arc\,sen} x$. Entonces la primitiva está dada por:

$$F(x) = F \circ g \circ g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sen} x + x\sqrt{1 - x^2})$$

Problema 4-4 Halle una primitiva de $F(x) = \int e^{ax+b}\, dx$.

Solución. Sea g la función $t = ax + b$; entonces

$$F \circ g(t) = \int e^t \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} e^t; \text{ por tanto, } F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b}$$

Problema 4-5 Halle $\int \frac{(\sqrt{x} + 1)^{1/2}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solución. $\int \frac{(\sqrt{x} + 1)^{1/2}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int (\sqrt{x} + 1)^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\int (\sqrt{x} + 1)^{1/2}\, d(\sqrt{x} + 1) =$

$$= 2\int u^{1/2}\, du \Big|\, u = \sqrt{x} + 1 = \frac{4u^{3/2}}{3} \Big|\, u = \sqrt{x} + 1 = \frac{4(\sqrt{x} + 1)^{3/2}}{3} + C$$

Problema 4-6 Halle $\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^5\theta}\, d\theta$.

Solución. Si se elige $\operatorname{sen}\theta = u$, y $\cos\theta\, d\theta = du$, entonces

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^5\theta}\, d\theta = \int \frac{du}{u^5} = \int u^{-5}\, du = \frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{\operatorname{sen}^{-4}\theta}{-4} + C$$

Problema 4-7 Halle $\int \frac{dx}{1 + e^{-x}} = \int \frac{e^x\, dx}{1 + e^x}$.

Solución. Haciendo la sustitución $e^x + 1 = u$, $e^x\, dx = du$, entonces

$$\int \frac{e^x\, dx}{e^x + 1} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|e^x + 1| + C$$

Problema 4-8 Halle $\int \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}\, \cos x\, dx$.

Solución. Sea $1 + \operatorname{sen} x = u$, $\cos x\, dx = du$. Entonces $I = \int u^{1/2}\, du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1 + \operatorname{sen} x)^{3/2} + C$.

Problema 4-9 Halle $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + 5x}}$.

Solución. Sea $4 + 5x = u$, $dx = \frac{1}{5}\,du$. Entonces $I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{2}{5}\,u^{1/2} + C = \frac{2}{5}\,(4 + 5x)^{1/2} + C$.

Problema 4-10 Halle $I = \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{2 + \operatorname{tg} \theta}$.

Solución. Sea $2 + \operatorname{tg} \theta = u$; $\sec^2 \theta \, d\theta = du$. Entonces $I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |2 + \operatorname{tg} \theta| + C$.

Problema 4-11 Halle $I = \int (1 + \ln x)\,\frac{dx}{x}$.

Solución. Sea $1 + \ln x = u$, $\frac{dx}{x} = du$. Entonces $I = \int u\,du = \frac{1}{2}\,u^2 + C = \frac{1}{2}\,(1 + \ln x)^2 + C$.

Problema 4-12 Halle $I = \int \sqrt{4 + 3e^x}\,e^x\,dx$.

Solución. Sea $4 + 3e^x = u$, $e^x\,dx = \frac{1}{3}\,du$. Entonces $I = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{9}\,u^{3/2} + C = \frac{2}{9}\,(4 + 3e^x)^{3/2} + C$.

Problema 4-13 Halle $I = \int \frac{x^{1/3}\,dx}{(1 + x^{4/3})^5}$.

Solución. Sea $1 + x^{4/3} = u$, $x^{1/3}\,dx = \frac{3}{4}\,du$. Entonces

$$I = \frac{3}{4} \int \frac{du}{u^5} = -\frac{3}{10}\,u^{-4} + C = -\frac{3}{16}\,(1 + x^{4/3})^{-4} + C$$

Problema 4-14 Halle $I = \int \frac{7x^3\,dx}{(1 - x^4)^{1/2}}$.

Solución. Sea $1 - x^4 = u$, $x^3\,dx = -\frac{1}{4}\,du$. Entonces

$$I = -\frac{1}{4}\int \frac{7\,du}{u^{1/2}} = -\frac{7}{2}\,u^{1/2} + C = -\frac{7}{2}\,(1 - x^4)^{1/2} + C$$

Problema 4-15 Halle $I = \int \left(1 - \frac{1}{y}\right)^3 \frac{dy}{y^2}$.

Solución. Sea $1 - \frac{1}{y} = u$, $\frac{dy}{y^2} = du$. Entonces

$$I = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{y}\right)^4 + C$$

Problema 4-16 Halle $I = \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{1 + x^2}$.

Solución. Sea $\operatorname{arc\,tg} x = u$, $\frac{dx}{1 + x^2} = du$. Entonces

$$I = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\,(\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C$$

Problema 4-17 Halle $I = \int \sec^3 \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$.

Solución. Sea $\sec \theta = u$, $\sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta = du$. Entonces

$$I = \int \sec^2 \theta \cdot \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta \, d\theta = \int u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \sec^3 \theta + C$$

Problema 4-18 Halle $I = \int \frac{e^{2x} \, dx}{1 + e^{2x}}$.

Solución. Sea $1 + e^{2x} = u$, $e^{2x} \, dx = \frac{du}{2}$. Entonces

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |1 + e^{2x}| + C$$

Problema 4-19 Halle $I = \int \frac{dx}{x(1 - \ln x)}$.

Solución. Sea $1 - \ln x = u$, $\frac{dx}{x} = du$. Entonces

$$I = -\int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C = -\ln |1 - \ln x| + C$$

Problema 4-20 Halle $I = \int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx$.

Solución. Sea $\sec x + \operatorname{tg} x = u$, $(\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x) \, dx = du$. Entonces

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Problema 4-21 Halle $I = \int e^{5x+1} \, dx$.

Solución. Sea $5x + 1 = u$, $dx = \frac{1}{5} du$. Entonces $I = \frac{1}{5} \int e^u \, du = \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{5x+1} + C$.

Problema 4-22 Halle $I = \int \frac{\sec^2 x \, dx}{e^{\operatorname{tg} x}}$.

Solución. Sea $\operatorname{tg} x = u$, $\sec^2 x \, dx = du$. Entonces $I = \int e^{-u} \, du = -e^{-u} + C = -e^{-\operatorname{tg} x} + C$.

Problema 4-23 Halle $I = \int \frac{\operatorname{sen} e^{-x} \, dx}{e^x}$.

Solución. Sea $e^{-x} = u$, $-e^{-x} \, dx = du$. Entonces $I = -\int \operatorname{sen} u \, du = \cos u + C = \cos e^{-x} + C$.

Problema 4-24 Halle $I = \int -\frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \, dx$.

Solución. Sea $\frac{1}{x} = u$, $-\frac{dx}{x^2} = du$. Entonces $I = \int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C = -\cos \frac{1}{x} + C$.

Problema 4-25 Halle $I = \int \operatorname{sen}^2 (5x + 1) \cos (5x + 1)\, dx$.

Solución. Sea $5x + 1 = u$, $dx = \frac{1}{5} du$. Entonces $I = \frac{1}{5}\int \operatorname{sen}^2 u \cos u\, du$. Ahora sea $\operatorname{sen} u = v$, $\cos u\, du = dv$. Entonces $I = \frac{1}{5}\int v^2\, dv = \frac{1}{15} v^3 + C = \frac{1}{15} \operatorname{sen}^3 u + C = \frac{1}{15} \operatorname{sen}^3 (5x + 1) + C$.

Problema 4-26 Halle $I = \int \ln^2 \cos x \operatorname{tg} x\, dx$.

Solución. Sea $\ln \cos x = u$, $-\operatorname{tg} x\, dx = du$. Entonces $I = -\int u^2\, du = -\frac{1}{3} u^3 + C = -\frac{1}{3} \ln^3 \cos x + C$.

Problema 4-27 Halle $I = \int x^3 \cos 5x^4\, dx$.

Solución. Sea $5x^4 = u$. Entonces $I = \frac{1}{20}\int \cos u\, du = \frac{1}{20} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{20} \operatorname{sen} 5x^4 + C$.

Problema 4-28 Halle $I = \int \frac{\ln (\ln x)\, dx}{x \ln x}$.

Solución. Sea $\ln x = u$, $\frac{dx}{x} = du$. Entonces $I = \int \frac{\ln u\, du}{u}$ y sea $\ln u = v$, $\frac{du}{u} = dv$. Entonces

$$I = \int v\, dv = \frac{1}{2} v^2 + C = \frac{1}{2} (\ln u)^2 + C = \frac{1}{2} [\ln (\ln x)]^2 + C$$

Problema 4-29 Halle $I = \int \frac{1 - \cos \frac{x}{3}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$.

Solución. Sea $x = 6t$, $dx = 6dt$. Entonces $I = \int \frac{1 - \cos 2t}{\operatorname{sen} 3t} 6dt$. Como $1 - \cos 2t = 2 \operatorname{sen}^2 t$ y $\operatorname{sen} 3t = 3 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}^3 t$, entonces $I = 6 \int \frac{2 \operatorname{sen}^2 t\, dt}{3 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}^3 t} = 12 \int \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{3 - 4 \operatorname{sen}^2 t} = 12 \int \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{-1 + 4 \cos^2 t}$; con el cambio $\cos t = u$, $dt = du$, se convierte en

$$I = 12\int \frac{du}{1 - 4u^2} = 6 \operatorname{arc\,tgh} 2u = 6 \operatorname{arc\,tgh} \left(2 \cos \frac{x}{6}\right) + C$$

Problema 4-30 Determine $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x \ln \operatorname{tg} x}$.

Solución. Sea $\ln \operatorname{tg} x = t$ o $\operatorname{tg} x = e^t$, $\frac{1}{\cos^2 x} dx = e^t\, dt$; entonces $dx = \operatorname{tg} x \cos^2 x\, dt = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\, dt$. Sustituyendo: $I = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dt}{t \operatorname{sen} 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t = \frac{1}{2} \ln (\ln \operatorname{tg} x) + C$.

Problema 4-31 Halle $I = \int \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$.

Solución. Sea $\operatorname{arc\,tg} x = t$, $\frac{dx}{1 + x^2} = dt$; sustituyendo:

$$I = \int \frac{e^t(1 + x^2)\, dt}{(1 + x^2)^{3/2}} = \int \frac{e^t\, dt}{\sqrt{1 + x^2}} = \int e^t \cos t\, dt \text{ (vea el Problema 5-5)}$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{2} e^t [\operatorname{sen} t + \cos t] = \frac{1}{2} e^{\operatorname{arc\,tg} x} \left[\frac{x + 1}{\sqrt{1 + x^2}}\right] + C.$$

Problema 4-32 Haciendo un cambio de variable, halle:

a) $\int \frac{1}{x^3}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{10} dx$; b) $\int \frac{dx}{x(x^4-1)^{1/2}}$; c) $\int (x-a)^{p-1}(x-b)^{-p-1}\,dx,\ p \ge 0, a \ne b.$

Solución. a) Si $u = (1-x^2)/x^2 \Rightarrow du = -\frac{2}{x^3}dx$ e $\int \frac{1}{x^3}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{10} dx = -\frac{1}{2}\int u^{10}\,du =$ $= -\frac{1}{22}u^{11} + C = -\frac{1}{22}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{11} + C.$

b) Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$ y, por tanto, $\int \frac{dx}{x(x^4-1)^{1/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2(x^4-1)^{1/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} =$ $= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec} x^2 + C.$

c) Sea $u = \frac{x-a}{x-b} \Rightarrow du = (a-b)/(x-b)^2\,dx$ e $\int (x-a)^{p-1}(x-b)^{-p-1}\,dx = \int \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-1}\frac{dx}{(x-b)^2} =$ $= \frac{1}{a-b}\int u^{p-1}\,du = \frac{u^p}{p(a-b)} + C = \frac{1}{p(a-b)}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^p + C.$

Problema 4-33 Haciendo un cambio de variable, halle:

$$a)\ \int \sec^5\theta\,\operatorname{tg}^5\theta\,d\theta;\quad b)\ \int \frac{dx}{1+\cos x};\quad c)\ \int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x}.$$

Solución. a) $\int \sec^5\theta\,\operatorname{tg}^5\theta\,d\theta = \int \sec^4\theta\,\operatorname{tg}^4\theta\sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta = \int \sec^4\theta(\sec^2\theta - 1)^2\sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta =$ $= \int (\sec^6\theta - \sec^4\theta)\sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta.$

Si $u = \sec\theta \Rightarrow du = \sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta$ e $\int \sec^5\theta\operatorname{tg}^5\theta\,d\theta = \int (u^6 - u^4)\,du = \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sec^7\theta}{7} - \frac{\sec^5\theta}{5} + C.$

b) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} - \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x\,dx =$ $= -\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x + C.$

c) $\int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2\operatorname{tg}^2 x + b^2}$. Si $u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = \sec^2 x\,dx$. Por tanto, $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2\operatorname{tg}^2 x + b^2} =$ $= \int \frac{du}{a^2u^2 + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}u + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right) + C.$

Problema 4-34 Por cambio de variable, halle:

$$a)\ \int e^{x+e^x}\,dx;\quad b)\ \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx;\quad c)\ \int a^x b^{2x} e^{3x}\,dx,\ a>0,\ b>0.$$

Solución. a) Si $u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$ e $\int e^{x+e^x}dx = \int e^{e^x}e^x\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{e^x} + C.$

b) Sea $u = e^x + e^{-x} \Rightarrow du = (e^x - e^{-x})\,dx$. Entonces

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$

c) $\int a^x b^{2x} e^{3x}\,dx = \int e^{x\ln a}e^{2x\ln b}e^{3x}\,dx = \int e^{(\ln a + 2\ln b + 3)x}\,dx = \frac{e^{(\ln a + 2\ln b + 3)x}}{\ln a + 2\ln b + 3} + C = \frac{a^x b^{2x} e^{3x}}{\ln a + 2\ln b + 3} + C.$

Problema 4-35 Por cambio de variable, halle: $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)^{1/2}}$

Solución. Si $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$

$$\int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)^{1/2}} = \int \frac{du}{(2^2 - u^2)^{1/2}} = \text{arc sen}\,\frac{u}{2} + C = \text{arc sen}\left(\frac{\ln x}{2}\right) + C$$

Problema 4-36 Por cambio de variable, halle: *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$.

Solución. *a)* Sea $x = (u-1)^2 \Rightarrow dx = 2(u-1)\,du$, $u = 1 + \sqrt{x}$ e $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{u-1}{u}\,du =$
$= 2\displaystyle\int\left(1 - \frac{1}{u}\right) du = 2u - 2\ln|u| + C' = 2(1 + \sqrt{x}) - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C' = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C.$

b) Sea $x - a = (b-a)\,\text{sen}^2\,\theta \Rightarrow dx = 2(b-a)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta$; $b - x = (b-a)(1 - \text{sen}^2\,\theta) =$
$= (b-a)\cos^2\theta$ y, por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \int \frac{2(b-a)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\sqrt{(b-a)\,\text{sen}^2\,\theta\,(b-a)\cos^2\theta}}\,d\theta = 2\int d\theta = 2\theta + C = 2\,\text{arc sen}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1/2} + C$$

Problema 4-37 Halle *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2-4)^{1/2}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{[1 + \sqrt{1+x}]^{1/2}}$.

Solución. *a)* Sea $x = 2\sec\theta \Rightarrow dx = 2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$. Entonces

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \int [2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta/8\sec^3\theta\,2\,\text{tg}\,\theta]\,d\theta = \frac{1}{8}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta =$$
$$= \frac{\theta}{16} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{32} + C = \frac{\theta}{16} + \frac{\text{sen}\,\theta\cos\theta}{16} + C = \frac{1}{16}\,\text{arc sec}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{16}\,\text{sen}\left(\text{arc sec}\,\frac{x}{2}\right)\cos\left(\text{arc sec}\,\frac{x}{2}\right) + C =$$
$$= \frac{\text{arc sec}\,\frac{x}{2}}{16} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{8x^2} + C.$$

b) Sea $[1 + \sqrt{1+x}]^{1/2} = u$ o $x = (u^2-1)^2 - 1 \Rightarrow dx = 4u(u^2-1)\,du$ e $\int [1 + \sqrt{1+x}]^{-1/2}\,dx =$
$= \displaystyle\int \frac{[4u(u^2-1)]}{u}\,du = 4\int (u^2-1)\,du = \frac{4u^3}{3} - 4u + C = \frac{4[1 + \sqrt{1+x}]^{3/2}}{3} - 4[1 + \sqrt{1+x}]^{1/2} + C.$

Problema 4-38 Sea f un polinomio y p un número real. Halle $\displaystyle\int \frac{f(x)\,dx}{x^p}$.

Solución. Se tiene que $\dfrac{f(x)}{x^p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-p}$.

Si $k - p \neq -1$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, entonces $\displaystyle\int \frac{f(x)\,dx}{x^p} = \sum_{k=0}^{n} a_k \int x^{k-p}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k-p+1}\,x^{k-p+1} + C.$

Si $m - p = -1$ con m un entero entre 0 y n, entonces

$$\int \frac{f(x)\,dx}{x^p} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \int x^{k-(m+1)}\,dx + a_m \int \frac{dx}{x} + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \int x^{k-(m+1)}\,dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{k-m}\,x^{k-m} + a_m \ln|x| + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{a_k}{k-m}\,x^{k-m} + C$$

Problema 4-39 Halle $\int x(1-x^2)^{1/2}\,\text{arc sen}\,x\,dx$.

Solución. Sea $u = \text{arc sen}\,x\,dx$ y $dv = x(1-x^2)^{1/2}\,dx$. Entonces $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ y $v = -\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

Por tanto,
$$\int x(1-x^2)^{1/2}\,\text{arc sen}\,x\,dx = -\frac{1}{3}\,\text{arc sen}\,x(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{3}\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{(1-x^2)^{1/2}}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\,\text{arc sen}\,x(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

Problema 4-40 Halle *a)* $\int (a^2 - x^2)^{1/2}\,dx$; *b)* $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+1}}$; *c)* $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Solución. *a)* Si $x = a \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\,d\theta$ y $\theta = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}$; $\int (a^2 - x^2)^{1/2}\,dx =$

$$= \int (a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta)^{1/2} a\cos\theta\,d\theta = a^2\int \cos^2\theta\,d\theta = a^2\int \frac{(1+\cos 2\theta)}{2}\,d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4}\operatorname{sen}2\theta + C = \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right]\cos\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right] + C = \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} +$$

$$+ \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{(a^2-x^2)^{1/2}}{a} + C = \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

b) Haciendo la sustitución $x + 1 = u^2$ o $u = (x+1)^{1/2} \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u\,du$, y

$$\int [x^2/(x+1)^{1/2}]\,dx = \int [(u^2-1)^2/u]\,du = 2\int (u^4 - 2u^2 + 1)\,du = \frac{2}{5}u^5 - \frac{4}{3}u^3 + 2u + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + 2(x+1)^{1/2} + C$$

c) Sea $x = \sec\theta \Rightarrow \sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta = dx$, $\theta = \operatorname{arc\,sec}x$, e $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \left(\frac{\sec^3\theta}{\operatorname{tg}\theta}\right)\sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta =$

$$= \int \sec^4\theta\,d\theta = \int \sec^2\theta[\operatorname{tg}^2\theta + 1]\,d\theta = \int \operatorname{tg}^2\theta\sec^2\theta\,d\theta \neq \int \sec^2\theta\,d\theta + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\theta + \operatorname{tg}\theta + C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(\operatorname{arc\,sec}x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sec}x) + C = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + (x^2-1)^{1/2} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Aplique el teorema de sustitución para calcular:

1. $\int 3\operatorname{sen}3x\,dx$. *Resp.:* $-\cos 3x$
2. $\int 2x(x^2+1)^{3/2}\,dx$. *Resp.:* $\frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2}$
3. $\int \cos^4 x(-\operatorname{sen}x)\,dx$. *Resp.:* $\frac{1}{5}\cos^5 x$
4. $\int 3\operatorname{tg}3x\,dx$. *Resp.:* $\ln|\sec 3x|$
5. $\int 2xe^{x^2}\,dx$. *Resp.:* e^{x^2}
6. $\int \cos x e^{\operatorname{sen}x}\,dx$. *Resp.:* $e^{\operatorname{sen}x}$

Dé la función $v(x)$ del integrando para que se verifique la igualdad.

7. $\int e^{\operatorname{tg}x}v(x)\,dx = e^{\operatorname{tg}x}$. *Resp.:* $\sec^2 x$
8. $\int \cos(x^2+1)v(x)\,dx = \operatorname{sen}(x^2+1)$. *Resp.:* $2x$
9. $\int \frac{1}{1+(3x)^2}v(x)\,dx = \operatorname{arc\,tg}3x$. *Resp.:* 3
10. $\int \sec^2(x^2+1)v(x)\,dx = \operatorname{tg}(x^2+1)$. *Resp.:* $2x$
11. $\int v(x)\operatorname{senh}(\ln x)\,dx = \cosh(\ln x)$. *Resp.:* $1/x$
12. $\int \frac{1}{\cos x}v(x)\,dx = \ln|\cos x|$. *Resp.:* $-\operatorname{sen}x$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}v(x)\,dx = \operatorname{arc\,senh}\sqrt{2}x$. *Resp.:* $\sqrt{2}$

Dé las sustituciones que permitan calcular las siguientes integrales:

14. $\int xe^{-x^2}\,dx.$ *Resp.:* $u = -x^2$

15. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}\,dx.$ *Resp.:* $u = e^x$

16. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx.$ *Resp.:* $u = x^2$

17. $\int x\sqrt{1 - x^2}\,dx.$ *Resp.:* $u = 1 - x^2$

18. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\,dx.$ *Resp.:* $u = \ln(\ln x)$

Calcule las siguientes integrales:

19. $\int_3^8 \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x + 1}}\,dx.$ *Resp.:* $2(\cos 2 - \cos 3)$

20. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x\,dx}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^{1/3}}.$ *Resp.:* $\frac{3}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)^{2/3} + C$

21. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}.$ *Resp.:* $2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} + C$

22. $\int \frac{dx}{1 + (2x - 1)^2}.$ *Resp.:* $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2x - 1)$

23. $\int \frac{x\,dx}{2 + \sqrt{1 + x}}.$ *Resp.:* $\frac{2}{3}(1 + x)^{3/2} - 2(1 + x) + 6(1 + x)^{1/2} - 12\ln(2 + \sqrt{1 + x}) + C$

24. $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} 4x}.$ *Resp.:* $\frac{1}{4}(\sec 4x + \operatorname{tg} 4x) + C$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos 2x}}.$ *Resp.:* $\frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$, si $\sec x > 0$

$\frac{1}{2}\ln|\sec x - \operatorname{tg} x| + C$, si $\sec x < 0$

26. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{1 - \operatorname{sen} x}.$ *Resp.:* $\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

27. $\int \frac{\operatorname{cotg} x\,dx}{\operatorname{cotg}^2 x - 1}.$ *Resp.:* $\frac{1}{2}\ln|\sec 2x| + C$

28. $\int \frac{dx}{1 + \cos 8x}.$ *Resp.:* $\frac{1}{8}\operatorname{tg} 4x + C$

29. $\int (\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x)\,dx.$ *Resp.:* $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$

30. $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}\,dx.$ *Resp.:* $\operatorname{tg} x - x + C$

Calcule las siguientes integrales empleando las sustituciones indicadas:

31. $\int x^5\sqrt{2 + x^3}\,dx;\ z^2 = 2 + x^3.$ *Resp.:* $\frac{2}{15}(2 + x^3)^{5/2} - \frac{4}{9}(2 + x^3)^{3/2} + C$

32. $\int \frac{dx}{3 + \sqrt{1 + 2x}};\ 1 + 2x = z^2.$ *Resp.:* $\sqrt{1 + 2x} - 3\ln|\sqrt{1 + 2x} + 3| + C$

33. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1 + e^x}};\ e^x = z.$ *Resp.:* $\frac{2}{3}(e^x + 1)^{3/2} - 2(e^x + 1)^{1/2} + C$

34. $\int \frac{x\,dx}{(2+x)^{1/4}}$; $2 + x = z^4$. *Resp.:* $\frac{4}{7}(2+x)^{7/4} - \frac{8}{3}(2+x)^{3/4} + C$

35. $\int \frac{x^3\,dx}{(2+3x)^{7/2}}$; $2 + 3x = z^2$. *Resp.:* $\frac{2}{81}\left(\sqrt{2+3x} + \frac{6}{\sqrt{2+3x}} - \frac{4}{(2+3x)^{3/2}} + \frac{8/5}{(2+3x)^{5/2}}\right) + C$

36. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$; $x = \frac{1}{z}$. *Resp.:* $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; $u = \sqrt{1+e^x}$. *Resp.:* $\ln(1 + \sqrt{1+e^x}) + \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) + C$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$; $u = \sqrt{\sqrt{x}+1}$. *Resp.:* $\frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{3/2} - 4(\sqrt{x}+1)^{1/2} + C$

39. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}$ $\left\{\begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \\ u = \operatorname{sen} t \end{array}\right.$ *Resp.:* $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

40. $\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{1/3}}$. *Resp.:* $2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6\ln(x^{1/6}+1) + C$

41. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$. *Resp.:* $\frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C$

42. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}}$. *Resp.:* $2\sqrt{2x+1} - 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} + C$

43. $\int \frac{dx}{x^{3/2} - x^{5/6}}$. *Resp.:* $\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| - 3\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x} + C$

44. $\int \frac{\sqrt{3+x}\,dx}{\sqrt{1-x}}$. *Resp.:* $-4\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}\sqrt{1-x} - \sqrt{3-2x-x^2} + C$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}$. *Resp.:* $2\sqrt{2x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| - 2\sqrt{x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right| + C$

CAPITULO 5

Integración por partes

Teorema. Sean g y h dos funciones definidas en el intervalo $[a,b]$ y que admiten derivadas continuas g' y h' sobre $[a,b]$. Entonces para todo x tal que $a \leq x \leq b$ se tiene que

$$\int_a^x g(t)h'(t)\,dt = g(x)h(x) - g(a)h(a) - \int_a^x g'(t)h(t)\,dt$$

En particular

$$\int_a^b g(t)h'(t)\,dt = g(t)h(t)\Big|_a^b - \int_a^b g'(t)h(t)\,dt$$

Demostración. De la fórmula de la derivada de un producto de dos funciones g y h se obtiene

$$[g(t)h(t)]' - [g'(t)h(t) + g(t)h'(t)] = 0, \quad a \leq t \leq h \tag{5-1}$$

Al integrar la expresión anterior y teniendo en cuenta que la integral de la función nula es cero se obtiene

$$\int_a^x \{[g(t)h(t)]' - [g'(t)h(t) + g(t)h'(t)]\}\,dt = 0, \quad a \leq x \leq b \tag{5-2}$$

Como g y h son derivables, entonces g' y h' son continuas sobre $[a,b]$ y también $g'h$, gh' (gh), según la igualdad (5-1); entonces cada una de las tres funciones es integrable sobre $[a,b]$ y la igualdad (5-2) implica

$$\int_a^x g(t)h'(t)\,dt = \int_a^x [g(t)h(t)]'\,dt - \int_a^x g'(t)h(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b$$

Según el segundo teorema fundamental del cálculo,

$$\int_a^x [g(t)h(t)]'\,dt = g(x)h(x) - g(a)h(a)$$

Ejemplo. Considere para $x > 0$ la integral de la función continua $\int_1^x \ln t\,dt$. Para aplicar la integración por partes se puede elegir, para que se verifiquen las hipótesis para $t > 0$,

$$\begin{cases} g(t) = \ln t,\ h'(t) = 1 \\ g'(t) = 1/t,\ h(t) = t \end{cases}$$

Entonces $\int_1^x \ln t\,dt = \Big[t \ln t\Big]_1^x - \int_1^x dt = x \ln x - x + 1.$

Ejemplo. Halle para x real cualquiera la integral de la función continua $\int_0^x t \operatorname{sen} t \, dt$.

Para que se verifiquen las hipótesis del teorema se puede elegir

$$\begin{cases} g(t) = t, & h'(t) = \operatorname{sen} t \\ g'(t) = 1, & h(t) = -\cos t \end{cases}$$

Entonces $\int_0^x t \operatorname{sen} t \, dt = \Big[-t \cos t\Big]_0^x + \int_0^x \cos t \, dt = -x \cos x + \operatorname{sen} x.$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 5-1 Halle $\int x^2 \cos x \, dx$.

Solución. Sea $u = x^2$, $dv = \cos x \, dx$. Entonces $I = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x \, dx$ y elija $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Por tanto, $I = x^2 \operatorname{sen} x - 2[-x \cos x + \int \cos x \, dx] = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$.

Problema 5-2 Halle $I = \int x^3 \sqrt{x+1} \, dx$.

Solución. Sea $u = x^3$, $\sqrt{x+1}\, dx = dv$. Entonces $I = \frac{2}{3} x^3(x+1)^{3/2} - 2\int x^2(x+1)^{3/2} dx$. Elijamos a $(x+1)^{3/2} dx = dv$, $x^2 = u$. Por tanto,

$$I = \frac{2}{3} x^3(x+1)^{3/2} - 2\left[\frac{2}{5} x^2(x+1)^{5/2} - \frac{4}{5}\int (x+1)^{5/2} x \, dx\right]$$

Elija $(x+1)^{5/2} dx = dv$, $x = u$. Por tanto,

$$I = \frac{2}{3} x^3(x+1)^{3/2} - \frac{4}{5} x^2(x+1)^{5/2} + \frac{8}{5}\left[\frac{2}{7}(x+1)^{7/2} x - \frac{2}{7}\int (x+1)^{7/2} dx\right] =$$

$$= \frac{2}{3} x^3(x+1)^{3/2} - \frac{4}{5} x^2(x+1)^{5/2} + \frac{16}{35} x(x+1)^{7/2} - \frac{32}{315}(x+1)^{9/2} + C$$

Problema 5-3 Halle $I = \int \ln x \, dx$.

Solución. Sea $dv = dx$, $\ln x = u$. Entonces $I = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$.

Problema 5-4 Halle $I = \int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

Solución. Sea $dv = dx$, $\operatorname{arc\,tg} x = u$. Entonces $I = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$.

Problema 5-5 Halle $I_1 = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$; $I_2 = \int e^{ax} \cos bx \, dx$.

Solución. Sea $I_1 = \int \underbrace{e^{ax}}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} bx \, dx}_{dv}$; $u = e^{ax}$, $du = e^{ax} dx \Rightarrow dv = \operatorname{sen} bx \, dx$; $v = \int \operatorname{sen} bx \, dx = -\frac{1}{b} \cos bx$.

Integrando por partes, $I_1 = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I_2$.

Análogamente, $I_2 = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}$.

Resolviendo el sistema se obtiene

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \operatorname{sen} bx - b \cos bx]$$

$$I_2 = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [b \operatorname{sen} bx + a \cos bx]$$

Problema 5-6 Calcule $I = \int x^n \lg_a x \, dx$.

Solución. $I = \int \underbrace{x^n}_{dv} \underbrace{\lg_a x}_{u} dx$; $dv = x^n dx$, $v = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $u = \lg_a x$, $du = \frac{1}{x} \lg_a e$. Entonces

$$I = \lg_a x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{x} \lg_a e \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \lg_a x - \frac{\lg_a e}{(n+1)^2} x^{n+1} =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\lg_a x - \frac{\lg_a e}{n+1} \right) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \lg_a \frac{x^{n+1}}{e} + C$$

Problema 5-7 Calcule $I = \int x^3 \cdot \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

Solución. Sea $dv = x^3 dx$, $v = \frac{x^4}{4}$, $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $du = \frac{dx}{1+x^2}$. Entonces

$$I = \frac{x^4}{4} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \frac{x^4}{4} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{4} \left[\int (x^2 - 1) \, dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arc\,tg} x \right] = \frac{1}{4} (x^4 - 1) \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{4} x + C$$

Problema 5-8 Halle $I = \int x^3 \cos 2x \, dx$.

Solución. Sea $du = \cos 2x \, dx \Rightarrow u = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$; $v = x^3 \Rightarrow v' = 3x^2$. Entonces,

$$I = \int x^3 \cos 2x \, dx = \frac{x^3}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2} \int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx$$

Ahora:

$$\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \int x \cos 2x \, dx$$

e

$$\int x \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$\therefore \int x^3 \cos 2x \, dx = \frac{x^3}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{4} x \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8} \cos 2x + C$$

Problema 5-9 Determine $I = \int \frac{x^2 \, dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2}$.

Solución. Multiplicando numerador y denominador por sen x,

$I = \int \frac{x^2 \operatorname{sen} x \, dx}{\operatorname{sen} x \, (x \cos x - \operatorname{sen} x)^2}$. Haciendo $u = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$, $du = \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$, $dv = \frac{x \operatorname{sen} x \, dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2}$,

$v = \int \frac{x \operatorname{sen} x \, dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2}$; y con el cambio $x \cos x - \operatorname{sen} x = t$, $dt = (\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x) \, dx$,

$v = \int -\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{x \cos x - \operatorname{sen} x}$. Entonces $I = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{x \cos x - \operatorname{sen} x} -$

$$- \int \frac{dx}{x \cos x - \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{x}{\operatorname{sen} x \, (x \cos x - \operatorname{sen} x)} - \operatorname{cotg} x + C$$

Problema 5-10 Halle $\int x \ln x\, dx$.

Solución. Sea $x\,dx = dv$, $\ln x = u$. Entonces $I = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

Problema 5-11 Halle $I = \int \ln^2 x\, dx$.

Solución. Sea $dv = dx$, $\ln^2 x = u$. Entonces $I = x \ln^2 x - 2\int \ln x\, dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$.

Problema 5-12 Halle $I = \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$.

Solución. Sea $dv = \operatorname{sen} 3x\, dx$, $u = e^{2x}$. Entonces $I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\, dx$. Ahora, sea $dv = \cos 3x\, dx$, $u = e^{2x}$. Por tanto,

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\operatorname{sen} 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\, dx$$

Entonces $\frac{13}{9}\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\, dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\operatorname{sen} 3x + C$.

$$\therefore \int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\, dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\operatorname{sen} 3x + C.$$

Problema 5-13 Halle $I = \int \sec^3 x\, dx$.

Solución. Sea $dv = \sec^2 x\, dx$, $\sec x = u$. Entonces

$I = \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \sec x \operatorname{tg} x = \sec x \operatorname{tg} x - \int(\sec^3 x - 1)\sec x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx.$

Entonces $2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$.

$$\therefore \int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

Problema 5-14 Halle $I = \int x^3\sqrt{1 + x^2}\, dx$.

Solución. Sea $x\sqrt{1 + x^2}\, dx = dv$, $x^2 = u$. Entonces $I = \frac{1}{2}x^2(1 + x^2)^{3/2} - \frac{2}{3}\int x(1 + x^2)^{3/2}\, dx =$
$= \frac{1}{3}x^2(1 + x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1 + x^2)^{5/2} + C.$

Problema 5-15 Halle $I = \int \frac{x^3\, dx}{(4 + x^2)^2}$.

Solución. Sea $dv = \frac{x\, dx}{(4 + x^2)^2}$, $u = x^2$. Entonces $I = \frac{-1/2\, x^2}{4 + x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{4 + x^2} = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{4 + x^2} +$
$+ \frac{1}{2}\ln|4 + x^2| + C.$

Problema 5-16 Calcule $I = \int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$.

Solución. Sea $dv = dx \Rightarrow v = x$ y $u = \operatorname{arc\,sen} x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. Entonces

$$I = x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

Problema 5-17 Calcule $I = \int x^3 \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.

Solución. Sea $dv = x^3\, dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}$ y $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $du = \frac{dx}{1+x^2}$. Entonces

$$I = \frac{x^4}{4} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{4}\int \frac{x^4\, dx}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{4} x^4 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{4}\left[\int (x^2-1)\, dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arc\,tg} x\right] = \frac{1}{4}(x^4-1)\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + C$$

Problema 5-18 Halle $I = \int \frac{e^x(1 + x \ln x)}{x}\, dx$.

Solución. $I = \int \frac{e^x}{x}\, dx + \int e^x \ln x\, dx$.

Ahora, $\int \frac{e^x}{x}\, dx$ se conoce con el nombre de logaritmo integral y no se puede expresar mediante funciones elementales.

Para integrar la segunda hagamos $e^x = v' \Rightarrow v = e^x$ y $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$. Entonces:

$$\int e^x \ln x\, dx = e^x \ln x - \int \frac{e^x}{x}\, dx$$

Sustituyendo,

$$I = \int \frac{e^x}{x}\, dx - \int \frac{e^x}{x}\, dx + e^x \ln x = e^x \ln x + C$$

Problema 5-19 Halle $I = \int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\, dx$.

Solución. $I = \int e^x \frac{(x+1)^2 - 2x}{(x+1)^2}\, dx = \int e^x\, dx - 2\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx = e^x - \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx$.

Para calcular la segunda integramos por partes con $u = xe^x \Rightarrow du = (xe^x + e^x)\, dx$ y

$$dv = \frac{dx}{(1+x)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}$$

Entonces $\int xe^x \frac{dx}{(1+x)^2} = -xe^x \frac{1}{1+x} + \int \frac{(1+x)e^x}{1+x}\, dx = -xe^x \frac{1}{1+x} + e^x$.

Sustituyendo, $I = \frac{(x-1)e^x}{x+1}$.

Problema 5-20 Halle $I = \int \frac{x^2\, dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2}$.

Solución. $I = \int \frac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\operatorname{sen} x}$. Integrando por partes, con

$$u = \frac{x}{\operatorname{sen} x},\ du = \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx;\ dv = \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2},\ v = \int \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}$$

Con el cambio $x\cos x - \operatorname{sen} x = t$, $dt = (\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$,

$$v = \int -\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x}$$

Entonces

$$I = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x} - \int \frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx =$$

$$= \frac{x}{\operatorname{sen} x\,(x\cos x - \operatorname{sen} x)} - \operatorname{cotg} x + C$$

Problema 5-21 Halle: *a)* $\int x^2 \text{ arc sen } x\, dx$; *b)* $\int \frac{x \ln x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$; *c)* $\int x^4 \ln^2 x\, dx$.

Solución. *a)* Haciendo primero la sustitución $x = \text{sen}\,\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$ e $\int x^2 \text{ arc sen } x\, dx = \int \theta \,\text{sen}^2\theta \cos\theta\, d\theta$.

Haciendo $u = \theta$ y $dv = \text{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta \Rightarrow du = d\theta$ y $v = \frac{\text{sen}^3\theta}{3}$, e integrando por partes, entonces

$$\int \theta\,\text{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta = \theta\frac{\text{sen}^3\theta}{3} - \frac{1}{3}\int \text{sen}^3\theta\, d\theta = \theta\frac{\text{sen}^3\theta}{3} - \frac{1}{3}\int (1-\cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta =$$
$$= \theta\frac{\text{sen}^3\theta}{3} + \frac{\cos\theta}{3} - \frac{\cos^3\theta}{9} + C$$

Es decir,

$$\int x^2 \text{ arc sen } x\, dx = x^3\frac{\text{arc sen } x}{3} + \cos\frac{(\text{arc sen } x)}{3} - \cos^3\frac{(\text{arc sen } x)}{9} + C =$$
$$= x^3\frac{\text{arc sen } x}{3} + \frac{(1-x^2)^{1/2}}{3} - \frac{(1-x^2)^{3/2}}{9} + C$$

b) Sea $u = \ln x$ y $dv = x/\sqrt{(1-x^2)}\, dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ y $v = -\sqrt{1-x^2}$, e integrando por partes,

$$\int \frac{x\ln x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\ln x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx$$

Si en la última integral se hace $x = \text{sen}\,\theta$, $dx = \cos\theta\, d\theta$, entonces

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx = \int \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{\text{sen}\,\theta} = \int \frac{1-\text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta}\, d\theta = \int \text{cosec}\,\theta\, d\theta - \int \text{sen}\,\theta\, d\theta = \ln|\text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta| +$$
$$+ \cos\theta + C = \ln|\text{cosec}\,(\text{arc sen } x) - \text{cotg}\,(\text{arc sen } x)| + \cos(\text{arc sen } x) + C =$$
$$= \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + \sqrt{1-x^2} + C$$

Por tanto, $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{(1-x^2)}\ln|x| + \ln\left|1-\sqrt{1-x^2}\right| - \ln|x| + \sqrt{1-x^2} + C.$

c) Sea $u = \ln^2 x$ y $dv = x^4\, dx \Rightarrow du = \frac{2\ln x}{x}\, dx$, $v = \frac{x^5}{5}$ e $\int x^4\ln^2 x\, dx = x^5\frac{\ln^2 x}{5} - \frac{2}{5}\int x^4 \ln x\, dx$.

Calculando esta última integral por partes se obtiene

$$\int x^4\ln x\, dx = \frac{x^5\ln x}{5} - \frac{x^5}{25} + C$$

Por tanto,

$$\int x^4\ln x\, dx = \frac{x^5\ln^2 x}{5} - \frac{2x^5\ln x}{25} + \frac{2x^5}{125} + C$$

Problema 5-22 Halle $\int \frac{x+\text{sen}\,x}{1+\cos x}\, dx$.

Solución. Sea $u = x + \text{sen}\,x$, $dv = 1/(1+\cos x)\, dx \Rightarrow du = (1+\cos x)\, dx$ y $v = \text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x$.

Entonces

$$\int \frac{x+\text{sen}\,x}{1+\cos x}\, dx = (x+\text{sen}\,x)(\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x) - \int (\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x)(1+\cos x)\, dx =$$
$$= x(\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x) + (1-\cos x) - \int [(1-\cos x)(1+\cos x)/\text{sen}\,x]\, dx =$$
$$= x(\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x) + (1-\cos x) - \int \text{sen}\,x\, dx = x(\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x) + (1-\cos x) + \cos x + C =$$
$$= x(\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x) + C.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Integrando por partes muestre que:

1. $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.$

2. $\int x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

3. $\int x \ln 3x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln 3x - \frac{x^2}{4} + C.$

4. $\int xe^x \operatorname{sen} x\, dx = ?$

5. Verifique que: *a)* $\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx.$
b) $\int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x\, dx.$

6. Sea $p(x)$ un polinomio de grado n. Muestre por derivación que:

$$\int e^{ax} p(x)\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sum_{0}^{n} (-1)^j a^{-j} p^{(j)}(x), \text{ con } p^{(j)} \text{ la derivada } j\text{-ésima de } p(x)$$

7. Aplicando el ejercicio anterior calcule:

a) $\int x^2 e^{3x}\, dx$; *b)* $\int (x + b)^n e^{ax}\, dx$; *c)* $\int (x^3 - x + 1) e^{2x}\, dx$

Integrando por partes muestre que:

8. $\int x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C.$

9. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$

10. $\int \ln (\ln x) \frac{dx}{x} = \ln x \cdot \ln (\ln x) - \ln x + C.$

11. $\int \cos \ln x\, dx = x \cos (\ln x) + \left[x \operatorname{sen} (\ln x) - \int x \cos (\ln x) \frac{dx}{x} \right] + C.$

12. $\int x (\ln x)^2\, dx = \frac{x^2 (\ln x)^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^3}{6} + C.$

13. $\int (\ln x)^n\, dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx + C.$

14. $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C.$

15. $\int x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{3}{4} \operatorname{sen} x - \frac{1}{36} \operatorname{sen} 3x - \frac{3}{4} x \cos x + \frac{1}{12} x \cos 3x + C.$

16. $\int x^2 \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{6} x^3 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} x^2 \right) \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x + C.$

17. $\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$ y muestre que $\int \cos^3 x\, dx = \frac{3}{4} \operatorname{sen} x + \frac{1}{12} \operatorname{sen} 3x + C$
e $\int \cos^4 x\, dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C.$

18. $\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x\, dx}{\cos^{m+1} x} = \frac{1}{m} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m} \int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x\, dx}{\cos^{m-1} x}$ y halle $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$; $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx.$

19. $\int \frac{\cos^{m+1} x\, dx}{\operatorname{sen}^{n+1} x} = -\frac{1}{n} \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n} \int \frac{\cos^{m-1} x\, dx}{\operatorname{sen}^{n-1} x}$ y halle $\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx$; $\int \operatorname{cotg}^4 x\, dx.$

20. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C.$

21. $\int \ln (x + \sqrt{1 + x^2})\, dx = x \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) + C.$



Integrales trigonométricas

Las siguientes identidades trigonométricas son útiles en el cálculo de algunas integrales:

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$
2. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x.$
3. $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$
4. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$
6. $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$
7. $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)].$
8. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)].$
9. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)].$
10. $1 - \cos x = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}.$
11. $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}.$
12. $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 6-1 Halle $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx.$

Solución. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)\, dx =$
$= \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{\cos 4x + 1}{2}\right) dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C.$

Problema 6-2 Halle $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x \, dx.$

Solución. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x \, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^3 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \, dx +$
$+ \int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x \, dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x + C.$

Problema 6-3 Halle $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx.$

Solución. $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx - \int \operatorname{tg} x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x +$
$+ \ln|\cos x| + C.$

Problema 6-4 Halle $I = \int \operatorname{sen} 7x \cos 9x\, dx$.

Solución. $\int \operatorname{sen} 7x \cos 9x\, dx = \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen} 16x + \operatorname{sen}(-2x)] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{16}\cos 16x + \frac{1}{2}\cos 2x\right] + C.$

Problema 6-5 Halle $I = \int \operatorname{sen}\left(\frac{5-x}{2}\right) dx$.

Solución. Sea $\frac{5-x}{2} = u$, $dx = -2\,du$. Entonces $I = -2\int \operatorname{sen} u\, du = 2\cos u + C = 2\cos\left(\frac{5-x}{2}\right) + C.$

Problema 6-6 Halle $\int \cos^{2/3} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$.

Solución. Sea $2\theta = u$, $\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta = -\frac{du}{2}$. Entonces

$$I = -\frac{1}{2}\int u^{2/3}\, du = -\frac{3}{10}u^{5/3} + C = -\frac{3}{10}\cos^{5/3} 2\theta + C$$

Problema 6-7 Halle $\int \operatorname{tg}^6 \theta\, d\theta$.

Solución. $\int \operatorname{tg}^6 \theta\, d\theta = \int \operatorname{tg}^4 \theta \operatorname{tg}^2 \theta\, d\theta = \int \operatorname{tg}^4 \theta \sec^2 \theta\, d\theta - \int \operatorname{tg}^4 \theta\, d\theta = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 \theta - \int \operatorname{tg}^4 \theta\, d\theta = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 \theta -$
$- \int \operatorname{tg}^2 \theta \sec^2 \theta + \int \operatorname{tg}^2 \theta\, d\theta = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 \theta - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \theta + \int (\sec^2 \theta - 1)\, d\theta = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 \theta - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \theta + \operatorname{tg} \theta - \theta + C.$

Problema 6-8 Halle $\int \frac{\cos^5 \theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^{1/3} \theta\, d\theta}$.

Solución. $\int \frac{\cos^5 \theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^{1/3} \theta} = \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^2}{\operatorname{sen}^{1/3} \theta} \cos \theta\, d\theta = \int [\operatorname{sen}^{1/3} \theta - 2 \operatorname{sen}^{5/2} \theta + \operatorname{sen}^{11/3} \theta] \cos \theta\, d\theta =$
$= \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{2/3} \theta - \frac{6}{8}\operatorname{sen}^{8/3} \theta + \frac{3}{14}\operatorname{sen}^{14/3} \theta + C.$

Problema 6-9 Halle $\int \operatorname{tg}^7 x \sec^4 x\, dx$.

Solución. $\int \operatorname{tg}^7 x \sec^4 x\, dx = \int \operatorname{tg}^7 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x\, dx = \int \operatorname{tg}^7 x \sec^2 x + \int \operatorname{tg}^9 x \sec^2 x\, dx = \frac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x +$
$+ \frac{1}{10}\operatorname{tg}^{10} x + C.$

Problema 6-10 Determine $\int \cos mx \cos nx\, dx$.

Solución. $\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos (m+n)x + \frac{1}{2}\int \cos (m-n)x = \frac{1}{2(m+n)}\operatorname{sen}(m+n)x +$
$+ \frac{1}{2(m-n)}\operatorname{sen}(m-n)x + C,\ m \neq n.$

Si $m = n \Rightarrow \int \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2}(\cos 2mx + 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m}\operatorname{sen} mx + C.$

Problema 6-11 Halle $I = \int \operatorname{sen}^n x\, dx$.

Solución. $\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\, dx$. Sea $dv = \operatorname{sen} x\, dx$.

$I = -\text{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx = -\text{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x(1 - \text{sen}^2 x)\, dx =$
$= -\text{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \text{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\, dx.$

$$\therefore \int \text{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\, dx.$$

Problema 6-12 Halle $\int \cos^4 x\, dx$.

Solución. $\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\int \cos^2 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x + \frac{1}{4}\int dx = \frac{1}{4}\int \frac{\cos 4x + 1}{2}\, dx +$
$+ \frac{1}{4}\text{sen } 2x + \frac{1}{4}x = \frac{1}{32}\text{sen } 4x + \frac{1}{4}\text{sen } 2x + \frac{3}{8}x + C.$

Integrales que conducen a funciones trigonométricas recíprocas

Problema 6-13 Halle $\int \frac{dx}{25 + x^2}$.

Solución. Sea $x = 5u$, $dx = 5\, du$. Entonces $I = 5\int \frac{du}{25 + 25u^2} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{5}\text{arc tg } u + C =$
$= \frac{1}{5}\text{arc tg }\frac{x}{5} + C.$

Problema 6-14 Halle $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 7x^2}}$.

Solución. Sea $\sqrt{7}x = 3u$, $dx = \frac{3}{\sqrt{7}}du$. Entonces $I = \frac{3}{\sqrt{7}}\int \frac{du}{\sqrt{9 - 9u^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\text{arc sen } u + C =$
$= \frac{1}{\sqrt{7}}\text{arc sen }\frac{\sqrt{7}}{3}x + C.$

Problema 6-15 Halle $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$.

Solución. Sea $e^x = u$, $e^x\, dx = du$. Entonces $I = \int \frac{du}{1 + u^2} = \text{arc tg } u + C = \text{arc tg } e^x + C.$

Problema 6-16 Halle $I = \int \frac{e^x\, dx}{1 + e^{2x}}$.

Solución. Sea $e^x = u$, $e^x\, dx = du$. Entonces $I = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{arc sen } u + C = \text{arc sen (tg } x) + C.$

En los siguientes problemas se van a calcular integrales que contienen $ax^2 + bx + C$, que se puede escribir como $(a_1x + b_1)^2 + C_1^2$ o $\sqrt{ax^2 + bx + C}$, que se puede escribir como $\sqrt{C_1^2 - (a_1x + b_1)^2}$.

Problema 6-17 Halle $I = \int \frac{dx}{3x^2 + 6x + 5}$.

Solución. Sea $\sqrt{3}(x + 1) = u\sqrt{2}$, $\sqrt{3}\, dx = \sqrt{2}\, du$. Entonces $I = \int \frac{dx}{3(x + 1)^2 + 2} = \int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\, du}{2u^2 + 2} =$
$= \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\text{arc tg } u + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\text{arc tg }\sqrt{\frac{3}{2}}(x + 1) + C.$

Nota. Una vez que el denominador se ha convertido en la suma de dos cuadrados, la sustitución se halla haciendo $3(x + 1)^2 + 2 = 2(u^2 + 1)$.

Problema 6-18 Halle $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 6x - x^2}}$.

Solución. Sea $\sqrt{3}(x - 1) = \sqrt{5}u$, $dx = \sqrt{\frac{5}{3}}\,du$.

Entonces $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 3(1 - 2x + x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 3(x-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{5 - 5u^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc sen}\, u + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc sen} \sqrt{\frac{3}{5}}(x - 1) + C.$

Nota. También $1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2$, y el problema se puede resolver haciendo la sustitución $\sqrt{3}(1 - x) = \sqrt{5}u$, la cual conduce a la respuesta $\frac{1}{\sqrt{3}} \arccos \sqrt{\frac{3}{5}}(1 - x) + C$. Observe que la diferencia entre las dos funciones trigonométricas en la respuesta es la constante $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, que se absorbe en la constante arbitraria.

Problema 6-19 Halle $I = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + e^x + 3}$.

Solución. Sea $e^x = u$, $e^x\,dx = du$. Entonces $I = \int \frac{dx}{u^2 + 2u + 3} = \int \frac{du}{(u + 1)^2 + 2}$.

Sea $u + 1 = \sqrt{2}v$, $du = \sqrt{2}\,dv$.

Entonces $I = \sqrt{2} \int \frac{dv}{2v^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{v^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tg}\, v + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{u + 1}{\sqrt{2}} + C =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{e^x + 1}{\sqrt{2}} + C.$

Problema 6-20 Halle $I = \int \frac{dx}{(2x + 1)\sqrt{4x^2 + 4x - 1}}$.

Solución. $I = \int \frac{dx}{(2x + 1)\sqrt{4x^2 + 4x - 1}} = \int \frac{dx}{(2x + 1)\sqrt{(2x + 1)^2 - 2}}$.

Sea $2x + 1 = \sqrt{2}u$, $dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,du$. Entonces

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{2}u\sqrt{2u^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{arc sec}\, u + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{arc sec} \frac{2x + 1}{\sqrt{2}} + C$$

Problema 6-21 Integre $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$ y dé los valores de x para los cuales es válida.

Solución. $x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - (3 + 1) = (x - 1)^2 - 4$.

Entonces $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x - 1)^2}} = \int \frac{d(x - 1)}{\sqrt{4 - (x - 1)^2}} = \text{arc sen} \frac{x - 1}{2} + C$. La integración es válida cuando $3 + 2x - x^2 = 4 - (x - 1)^2 > 0$, o cuando $(x + 1)(x - 3) < 0$, o cuando $|x - 1| < 2$, o cuando $-1 < x < 3$.

Problema 6-22 Integre $\int x \text{ arc tg}\, x\,dx$.

Solución. Sea $u = \text{arc tg}\, x$, $v = \frac{1}{2}x^2$. Entonces $I = \int \text{arc tg}\, x\, d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2\,dx}{1 + x^2} =$
$= \frac{1}{2}x^2 \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} \int \frac{(1 + x^2) - 1}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{arc tg}\, x + C = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2}x + C.$

Problema 6-23 Integre $\int \text{arc sen } x\, dx$.

Solución. Sea $u = \text{arc sen } x$. Entonces $\int \text{arc sen } x\, dx = x \text{ arc sen } x - \int x\, d(\text{arc sen } x)\, dx = x \text{ arc sen } x - $ $- \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \text{ arc sen } x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2)\, dx = x \text{ arc sen } x + \sqrt{1-x^2} + C.$

Problema 6-24 Calcule $\int \sqrt{z - 3x + 4x^2}$ empleando el teorema de sustitución.

Solución. $\int \sqrt{2-3x+4x^2} = \int \sqrt{\frac{23}{16} + \left[2\left(x - \frac{3}{8}\right)\right]^2}\, dx = \sqrt{\frac{23}{16} + [g(x)]^2} \cdot \frac{g'(x)}{2}$ con $g(x) = 2\left(x - \frac{3}{8}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{23}{16} + [g(x)]^2}\, g'(x) = \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{23}{16} + u^2}\, du \Big|^{u=g(x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{8}\right)\sqrt{\frac{23}{16} + \left[2\left(x - \frac{3}{8}\right)\right]^2} + \frac{23}{32} \text{ arc senh } \frac{8x-3}{\sqrt{23}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{8}\right)\sqrt{2 - 3x + 4x^2} + \frac{23}{32} \text{ arc senh } \frac{8x-3}{\sqrt{23}}$$

Problema 6-25 Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x + 4x^2}}$ empleando el teorema de sustitución.

Solución. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x+4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{23}{16} + \left[2\left(x - \frac{3}{8}\right)\right]^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + [g(x)]^2}} \cdot \frac{g'(x)}{2} = g(x) = 2\left(x - \frac{3}{8}\right)$ y

$a^2 = \frac{23}{16}$ $\quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}\Big|^{u=g(x)} = \frac{1}{2} \text{ arc sen } \frac{u}{a}\Big|^{u=g(x)} = \frac{1}{2} \text{ arc senh } \frac{8x-3}{\sqrt{23}} + C.$

Problema 6-26 Calcule $I = \int \frac{dx}{\text{sen}^5 x}$.

Solución. Es una integral de la forma $\int \text{sen}^m x\, dx$; m impar. Haciendo $\cos x = t \Rightarrow -\text{sen } x\, dx = dt$.

Por tanto, $I = \int \frac{\text{sen } x\, dx}{\text{sen}^6 x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^3}$; para calcular esta integral escribimos $1 = 1 - t^2 + t^2$; entonces

$$I = \int - \frac{dt}{(1-t^2)^2} - \int \frac{t^2\, dt}{(1-t^2)^3}$$

Integrando esta última por partes con $t = u \Rightarrow u' = 1$ y $v' = \frac{1}{(1-t^2)^3} \Rightarrow v = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-t^2)^2}$, se tiene que

$$I = \int \frac{t^2\, dt}{(1-t^2)^3} = \frac{1}{4}\,\frac{t}{(1-t^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} \Rightarrow I = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}.$$

Haciendo la descomposición anterior, $\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{t^2\, dt}{(1-t^2)^2}$.

Ahora, integrando por partes a $\int \frac{t^2\, dt}{(1-t^2)^2}$, con $t = u \Rightarrow u' = 1$ y $v' = \frac{t}{(1-t^2)^2}$. $\therefore\ v = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t^2}$, entonces $\int \frac{t^2\, dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2}$. Finalmente,

$$I = -\frac{1}{4}\,\frac{t}{(1-t^2)^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{t}{1-t^2} - \frac{3}{8}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{t(5-3t^2)}{8(1-t^2)^2} - \frac{3}{16}\ln\frac{1+t}{1-t} + C$$

Remplazando x en función de t

$$I = -\frac{\cos x(5 - 3\cos^2 x)}{8\,\text{sen}^4 x} - \frac{3}{16}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C$$

Nota. $\int \frac{dt}{(1-t^2)^3}$ se puede calcular descomponiendo el integrando en fracciones racionales.

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^3} = -\frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{(1-t^2)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-t^2)^2} + C \tag{1}$$

$$\int \frac{t\,dt}{(1-t^2)^3} = -\frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{(1-t^2)^3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t^2} + C \tag{2}$$

Problema 6-27 Calcule $I = \int \frac{x^2\,dx}{(\cos x + x \operatorname{sen} x)^2}$.

Solución. Haciendo $\cos x + x \operatorname{sen} x = z \Rightarrow x\cos x\,dx = dz$. Por tanto,

$$\int \frac{x\cos x\,dx}{(\cos x + x\operatorname{sen} x)^2} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\cos x + x\operatorname{sen} x} + C$$

Integrando a I por partes y teniendo en cuenta que $(\cos x + x\operatorname{sen} x)' = x\cos x$, se hace

$$\frac{x\cos x}{(\cos x + x\operatorname{sen} x)^2} = v' \Rightarrow v = -\frac{1}{\cos x + x\operatorname{sen} x} \text{ y } \frac{x}{\cos x} = u \Rightarrow u' = \frac{\cos x + x\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Por consiguiente,

$$I = -\frac{x}{\cos x(\cos x + x\operatorname{sen} x)} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{x}{\cos x(\cos x + x\operatorname{sen} x)} + \operatorname{tg} x + C$$

Problema 6-28 Calcule $I = \int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

Solución. Integrando por partes con $\operatorname{arc\,tg} x = u \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x^2}$ y $x^2 = v' \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$.

Por consiguiente, $I = \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$.

Para calcular esta última integral, que es de la forma $\int [f(x)] f'(x)\,dx$, se hace $1 + x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$.

Entonces $\int \frac{x^3\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln(t - \ln t) + C.$

Remplazando x en función de t,

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Finalmente, $I = \frac{x^3}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{6}(1+x^2) + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$

Problema 6-29 Calcule $I = \int \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

Solución. Descomponiendo a $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$; $I = \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx - \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$. Integrando a $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$, por partes, con $\operatorname{arc\,tg} x = u \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x^2}$ y $1 = v' \Rightarrow v = x$, entonces

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Ahora, $\int \frac{1}{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C.$

Finalmente, $I = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcule las siguientes integrales y verifique su resultado por derivación:

a) $\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx$; *b)* $\int \cos 3x\,dx$; *c)* $\int \cos^4 3x\,dx$; *d)* $\int (\operatorname{sen}^4 3x - \cos^4 3x)\,dx$

2. Calcule $\int \operatorname{sen}^3 ax\,dx$, expresándola como $\operatorname{sen}^2 ax \cdot \operatorname{sen} ax$ y después aplicando la identidad $\operatorname{sen}^2 ax = 1 - \cos^2 ax$.

3. Verifique que $\displaystyle\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1} ax \operatorname{sen}^{n+1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+1}\int \cos^{m-2} ax \operatorname{sen}^n ax\,dx.$

4. Empleando la identidad $\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1)$, halle la fórmula de reducción:

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$$

5. Halle $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$; $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

Obtenga las siguientes fórmulas de reducción: (m y n enteros > 0).

6. $\int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx.$

7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^n} = -\frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x\,dx}{x^{n-1}},\ n > 1.$

8. $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$

9. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx.$

10. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^n x\,dx = \frac{-1}{n-1}\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2} x\,dx.$

11. $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\,dx.$

12. $\displaystyle\int x^n (\ln x)^m\,dx = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}(\ln x)^m - m\int x^n (\ln x)^{m-1}\,dx\right].$

13. $$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} & \text{si } m^2 \neq n^2. \\ \pm\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2nx}{4n}\right) & \text{si } m = \pm n. \end{cases}$$

14. $$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} & \text{si } m^2 \neq n^2. \\ \pm\dfrac{\cos 2nx}{4n} & \text{si } m = \pm n. \end{cases}$$

15. $$\int \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + \dfrac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} & \text{si } m^2 \neq n^2. \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2nx}{4n} & \text{si } m^2 = n^2. \end{cases}$$

16. $\displaystyle\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \operatorname{sen}^n x\,dx.$

Efectúe las siguientes integraciones y dé el dominio en el cual es válido:

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}.$ *Resp.:* $\frac{1}{3}\sqrt{3}\arcsin\sqrt{3}x + C,\ \left]-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right[$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-1}}.$ *Resp.:* $\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{4}(x+3) + C,\ ]-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}[$

19. $\displaystyle\int \frac{(6x+5)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$ *Resp.:* $-6\sqrt{+5-4x-x^2} - 7\operatorname{arc\,sen}\frac{x+2}{3} + C,\ ]-5, 1[$

20. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx.$ *Resp.:* $x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$, $\mathbb{R}$

21. $\int x^2 \operatorname{arc\,sen} x\, dx.$ *Resp.:* $\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{9}(2 + x^2)\sqrt{1 - x^2} + C$, $]-1, 1[$

22. $\int (3x^2 + 1) \operatorname{arc\,tg} x\, dx.$ *Resp.:* $(x^3 + x) \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x^2 + C$, $\mathbb{R}$

23. $\int \operatorname{arc\,sen}(2x - 1)\, dx.$ *Resp.:* $\frac{1}{2}(2x - 1) \operatorname{arc\,sen}(2x - 1) + \sqrt{x - x^2} + C$, $]0, 1[$

24. $\int x \operatorname{arc\,tg}(x + 1)\, dx.$ *Resp.:* $\frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,tg}(x + 1) - \frac{x + 1}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) + C$, $\mathbb{R}$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \operatorname{arc\,sen} x\, dx.$ *Resp.:* $x - \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arc\,sen} x + C$, $]-1, 1[$

26. Empleando el teorema de sustitución muestre que

$$\int (ax^2 + bx + c)^p (2ax + b)\, dx = \begin{cases} \ln|ax^2 + bx + c| & \text{si } p = -1 \\ \dfrac{(ax^2 + bx + c)^{p+1}}{p + 1} & \text{si } p \neq -1 \end{cases}$$

Verifique las siguientes integrales:

27. $\int \operatorname{sen}^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{4}\cos^8 \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos^6 \frac{x}{2} + C.$

28. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C.$

29. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} + C.$

30. $\int \operatorname{cotg}^4 x\, dx = -\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x + x + C.$

31. $\int x \operatorname{sen}^2 x^2\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x^2}{8} + C.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos^3 x}} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{z^2 + z\sqrt{2} + 1}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} + C.$

34. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3}\, dx = \frac{3}{5}\operatorname{sen} \frac{5x}{6} + 3\operatorname{sen} \frac{x}{6} + C.$

35. $\int \cos x \cos^2 3x\, dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{20} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{28} + C.$

36. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\, dx = \frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$

CAPITULO 7

Teorema de sustitución recíproca para integrales

Teorema. Sean f y g funciones derivables y suponga que existe g^{-1}. Entonces

$$H(t) = \int f[g(t)]g'(t)\,dt \Rightarrow H[g^{-1}(x)] = \int f(x)\,dx$$

Es decir,

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]g'(t)\,dt\,\Big|^{t=g^{-1}(x)}$$

Demostración. Sea $H(t) = \int f[g(t)]g'(t)\,dt$ y $F(x) = \int f(x)\,dx$. Según el teorema de sustitución directa tenemos que $H(t) = F[g(t)]$. Si hacemos en esta expresión $t = g^{-1}(x)$, entonces

$$H[g^{-1}(x)] = F[g[g^{-1}(x)]] = F(x) = \int f(x)\,dx$$

La elección de la función que se debe sustituir en los integrandos que contienen ecuaciones de segundo grado se basa en expresar las formas $a^2 + x^2$, $a^2 - x^2$, $x^2 - a^2$, como cuadrados perfectos de las funciones básicas. La siguiente tabla da una lista de sumas y diferencias de cuadrados, que son cuadrados «perfectos» de las funciones circulares e hiperbólicas.

$1 - u^2 = g^2$	$1 + u^2 = g^2$	$u^2 - 1 = g^2$
$1 - \cos^2 t = \operatorname{sen}^2 t$	$1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$	$\sec^2 t - 1 = \operatorname{tg}^2 t$
$1 - \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$	$1 + \operatorname{cotg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t$	$\operatorname{cosec}^2 t - 1 = \operatorname{cotg}^2 t$
$1 - \operatorname{tgh}^2 t = \operatorname{sech}^2 t$	$1 + \operatorname{cosech}^2 t = \operatorname{cotgh}^2 t$	$\operatorname{cotgh}^2 t - 1 = \operatorname{cosech}^2 t$
$1 - \operatorname{sech}^2 t = \operatorname{tgh}^2 t$	$1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$	$\cosh^2 t - 1 = \operatorname{senh}^2 t$

Teniendo en cuenta esta tabla, se escribe:

$$a^2 - x^2 = a^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

$$a^2 + x^2 = a^2\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

$$x^2 - a^2 = a^2\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]$$

Para la primera fila de la tabla tenemos que:

$$x = a\cos t \Rightarrow a^2 - x^2 = a^2[1 - \cos^2 t] = a^2 \operatorname{sen}^2 t$$
$$x = a \operatorname{tg} t \Rightarrow a^2 + x^2 = a^2[1 + \operatorname{tg}^2 t] = a^2 \sec^2 t$$
$$x = a\sec t \Rightarrow x^2 - a^2 = a^2[\sec^2 t - 1] = a^2 \operatorname{tg}^2 t$$

Algo similar para las demás filas.

Cuando el integrando contiene expresiones de la forma $a^2 - x^2, a^2 + x^2, x^2 - a^2$, se hacen las siguientes sustituciones:

$g(t) = a\cos t$ si el integrando contiene $a^2 - x^2$
$g(t) = a \operatorname{tg} t$ si el integrando contiene $a^2 + x^2$
$g(t) = a\sec t$ si el integrando contiene $x^2 - a^2$

Estas tres sustituciones se pueden representar por medio de un triángulo como se indica en las Figuras 7-1, 7-2 y 7-3.

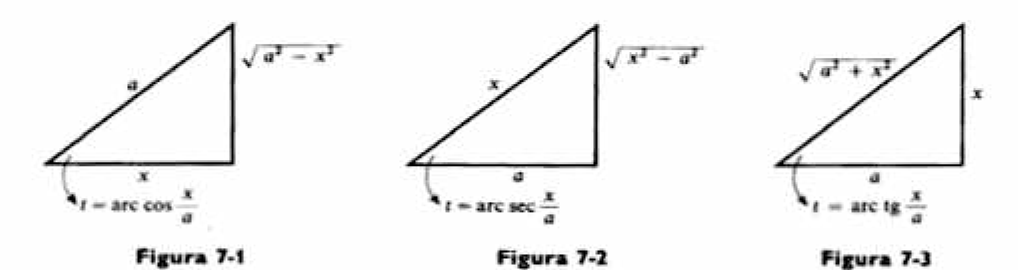


Figura 7-1 **Figura 7-2** **Figura 7-3**

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 7-1 Calcule $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$.

Solución. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{1}{a^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2}\, d(a \operatorname{tg} t)\Big|^{t = \operatorname{arc tg}\frac{x}{a}} = \int \frac{1}{a^2 \sec^2 t}\, a \sec^2 t\, dt \Big|^{t = \operatorname{arc tg}\frac{x}{a}} =$$
$$= \frac{t}{a}\Big|^{t = \operatorname{arc tg}\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} + C$$

Problema 7-2 Halle $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}$.

Solución. Sea $x = 2 \operatorname{tg} t \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 t + 4} = 2\sec t$ e $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} =$

$$= \int \frac{1}{(4 \operatorname{tg}^2 t)(2\sec t)}\, d(2 \operatorname{tg} t) = \int \frac{2\sec^2 t\, dt}{4 \operatorname{tg}^2 t\,(2 \sec t)} = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^{-2} t \cos t\, dt = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^{-2} t d(\operatorname{sen} t) =$$
$$= -\frac{1}{4\operatorname{sen} t} = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$$

Nota. Como $x = 2 \operatorname{tg} t \Rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sec t} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Problema 7-3 Halle $\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}$ con $4ac - b^2 > 0$.

Solución. $a + bx + cx^2 = c\left[x^2 + \frac{b}{c}x + \left(\frac{b}{2c}\right)^2\right] + a - \frac{b^2}{4c}$. Haciendo $q = 4ac - b^2$, tenemos que $a + bx + cx^2 = c\left[\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{q}{4c^2}\right]$. Sea $x + \frac{b}{2c} = \frac{\sqrt{q}}{2c}\,\mathrm{tg}\,t$, es decir, $x = \frac{\sqrt{q}}{2c}\,\mathrm{tg}\,t - \frac{b}{2c}$. Por tanto, $a + bx + cx^2 = \frac{q}{4c}(\mathrm{tg}^2\,t + 1) = \frac{q}{4c}\sec^2 t$. Según la fórmula de sustitución recíproca tenemos que

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{4c}{q}\int \frac{1}{\sec^2 t}\, d\left(\frac{\sqrt{q}}{2c}\,\mathrm{tg}\,t - \frac{b}{2c}\right) = \frac{2}{\sqrt{q}}\int dt = \frac{2}{\sqrt{q}}\,t\,\Big|^{t = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{2(x+b)}{\sqrt{q}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{q}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2(x + b)}{\sqrt{q}} + C$$

Problema 7-4 Halle $\int \frac{x\,dx}{a + bx + cx^2}$ con $4ac - b^2 > 0$.

Solución. Sea $x = \frac{1}{2a}(b + 2cx) - \frac{b}{2c}$ y $u = a + bx + cx^2$. Entonces

$$\int \frac{x\,dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{2c}\int \frac{1}{u}\,du - \frac{b}{2c}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2c}\ln|a + bx + cx^2| - \frac{b}{c\sqrt{q}}\ \mathrm{arc\ tg}\ \frac{2(x + b)}{\sqrt{q}},$$ según el problema anterior.

Problema 7-5 Halle $\int \frac{dx}{a + b\sqrt{x}}$.

Solución. Sea $t = a + b\sqrt{x}$. Entonces $\sqrt{x} = \frac{1}{b}(t - a)$ y $x = \frac{1}{b^2}(t - a)^2$. Por tanto, elegimos $g(t) = \frac{1}{b^2}(t - a)^2 \Rightarrow g'(t) = \frac{2}{b^2}(t - a)$ e

$$\int \frac{dx}{a + b\sqrt{x}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2}{b^2}(t - a)\,dt = \frac{2}{b^2}\int\left(1 - \frac{c}{t}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{b^2}(t - a\ln|t|)\Big|^{t = a + b\sqrt{x}} = \frac{2}{b^2}(a + b\sqrt{x}) - a\ln|a + b\sqrt{x}| + C$$

Problema 7-6 Halle $\int \frac{dx}{1 + e^x}$.

Solución. Sea $t = 1 + e^x \Rightarrow t - 1 = e^x \Rightarrow x = \ln(t - 1)$. Entonces, sea $g(t) = \ln(t - 1)$ y $g'(t) = \frac{1}{t - 1}$ e

$$\int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t - 1}\,dt = \int \frac{1}{t(t - 1)}\,dt\ \Big|^{t = 1 + e^x} = \int\left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t}\right)dt\Big|^{t = 1 + e^x} =$$

$$= \ln(t - 1) - \ln t|^{t = 1 + e^x} = \ln\frac{e^x}{1 + e^x} + C$$

Problema 7-7 Halle $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$.

Solución. Sea $x = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$, $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$. Entonces $I = 2\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{4 + 4\,\mathrm{tg}^2\,\theta}} =$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C$$

Para convertirla al sistema original empleamos el triángulo de la Figura 7-4.

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \text{ y } \operatorname{tg}\theta = \frac{x}{2}$$

Por tanto, $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\sqrt{4+x^2} + x\right| + C.$

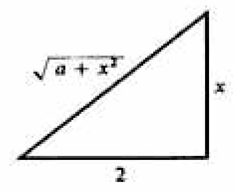


Figura 7-4

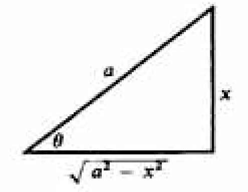


Figura 7-5

Problema 7-8 Halle $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Solución. Sea $x = a \operatorname{sen}\theta$, $dx = a\cos\theta\, d\theta$. Entonces $I = \int\sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\, d\theta = a\int\cos^2\theta\, d\theta =$ $= a^2\int\frac{1+\cos 2\theta}{2} = a^2\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2}\theta\right) + C = a^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right) + C.$

El triángulo de la Figura 7-5 muestra que $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, $\theta = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}$.

Entonces $I = \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\left(\frac{1}{2}\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right) + C =$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C.$$

Problema 7-9 Halle $I = \int\sqrt{x^2 - a^2}\, dx$.

Solución. Sea $x = a\sec\theta$, $dx = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$. Entonces

$I = a\int\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta = \int a^2\operatorname{tg}^2\theta\sec\theta\, d\theta = a^2\int(\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta = a^2\int\sec^3\theta\, d\theta -$ $- a^2\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|$. Según el Ejercicio 9 del Capítulo 7, $I = \frac{a^2}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta - \frac{a^2}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C.$

Según el triángulo de la Figura 7-6, $\sec\theta = \frac{x}{a}$ y $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$.

Entonces $\int\sqrt{x^2-a^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C.$

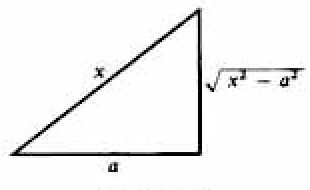


Figura 7-6

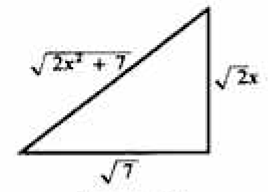


Figura 7-7

Problema 7-10 Halle $\int \frac{(2x^2+7)^{3/2}}{x}\,dx$.

Solución. Sea $\sqrt{2}\,x = \sqrt{7}\,\text{tg}\,\theta$, $dx = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\sec^2\theta\,d\theta$. Entonces $I = 7^{3/2}\int \frac{\sec^3\theta(\text{tg}^2\theta+1)\,d\theta}{\text{tg}\,\theta} =$

$$= \frac{7^{3/2}}{3}\sec^3\theta + 7^{3/2}\int \sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta + 7^{3/2}\int\frac{\sec\theta\,d\theta}{\text{tg}\,\theta} = \frac{7^{3/2}}{3}\sec^3\theta + 7^{3/2}\sec\theta + 7^{3/2}\int\frac{d\theta}{\text{sen}\,\theta} =$$

$$= \frac{7^{3/2}}{3}\sec^3\theta + 7^{3/2}\sec\theta + 7^{3/2}\ln|\text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta| + C.$$

Según el triángulo de la Figura 7-7, $\sec\theta = \frac{\sqrt{2x^2+7}}{\sqrt{7}}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{2x^2+7}}{\sqrt{2x}}$ y $\text{cotg}\,\theta = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2x}}$.

Entonces $\int \frac{(2x^2+7)^{3/2}}{x} = 7^{3/2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2x^2+7}}{\sqrt{7}}\right)^3 + \frac{\sqrt{2x^2+7}}{\sqrt{7}} + \ln\left|\frac{\sqrt{2x^2+7}}{\sqrt{2x}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2x}}\right|\right] + C.$

Problema 7-11 Halle $I = \int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^{3/2}}$.

Solución. Sea $\sqrt{x} = \text{tg}^2\theta$, $x = \text{tg}^4\theta$, $dx = 4\,\text{tg}^3\theta\sec^2\theta\,d\theta$. Entonces

$$I = \int \frac{4\,\text{tg}^3\theta\sec^2\theta}{(1+\text{tg}^2\theta)^{3/2}}\,d\theta = 4\int\frac{\text{tg}^3\theta\,d\theta}{\sec\theta} = 4\int\frac{(\sec^2\theta-1)\,\text{tg}\,\theta\,d\theta}{\sec\theta} = 4\int\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta - 4\int\text{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$= 4\sec\theta + 4\cos\theta + C.$$

Según el triángulo de la Figura 7-8,

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})^{3/2}} = 4\left(\sqrt{1+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right) + C$$

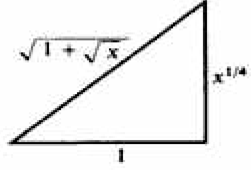


Figura 7-8

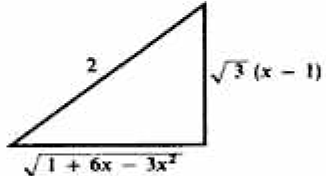


Figura 7-9

Problema 7-12 Halle $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+6x-3x^2}}$.

Solución. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+6x-3x^2}} = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-3(x-1)^2}}$. Sea $\sqrt{3}(x-1) = 2\,\text{sen}\,\theta$.

Entonces
$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\text{sen}\,\theta+1}{\sqrt{4-4\,\text{sen}^2\theta}}\cos\theta\,d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\right)d\theta =$$

$$= -\frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\theta + C$$

Según el triángulo de la Figura 7-9, $\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+6x-3x^2}$ y $\theta = \text{arc sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1)$.

Entonces $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+6x-3x^2}} = -\frac{1}{3}\int\sqrt{1+6x-3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) + C.$

Problema 7-13. Halle $I = \int \frac{x\,dx}{(7 + 4x + x^2)^{3/2}}$.

Solución. $I = \int \frac{x\,dx}{[3 + (x + 2)^2]^{3/2}}$. Sea $x + 2 = \sqrt{3}\,\text{tg}\,\theta$. Entonces

$$I = \sqrt{3}\int \frac{\sqrt{3}\,\text{tg}\,\theta - 2}{(3 + 3\,\text{tg}^2\,\theta)^{3/2}}\cdot \sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}\,\text{tg}\,\theta - 2}{\sec\theta} = \frac{1}{3}\int (\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta - \frac{2}{3}\,\text{sen}\,\theta + C$$

Según el triángulo de la Figura 7-10, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7 + 4x + x^2}}$, $\text{sen}\,\theta = \frac{x + 2}{\sqrt{7 + 4x + x^2}}$.

Por tanto, $I = -\frac{1}{3}\,\frac{2x + 7}{\sqrt{7 + 4x + x^2}} + C$.

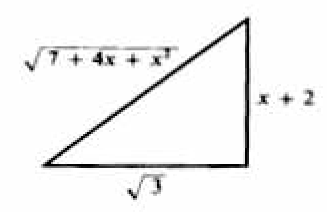


Figura 7-10

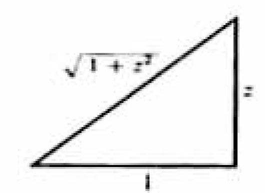


Figura 7-11

Problema 7-14 Halle $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$.

Solución. Sea $x = \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$. Entonces $I = \int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}}$.

Sea $z = \text{tg}\,\theta$, $dz = \sec^2\theta\,d\theta$.

Entonces $I = -\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec\theta} = -\int \sec\theta\,d\theta = -\ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta| + C =$

$$= -\ln|\sqrt{z^2 + 1} + z| + C = -\ln\left|\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \frac{1}{x}\right| + C = -\ln\left|\frac{\sqrt{1 + x^2} + 1}{x}\right| + C.$$

Problema 7-15 Halle $I = \int \frac{dx}{\text{cotg}\,x + \cos x}$.

Solución. 1. Haciendo la sustitución $z = \text{tg}\,\frac{x}{2}$, se obtiene

$$I = \int \frac{dx}{\frac{\cos x}{\text{sen}\,x} + \frac{\cos x}{1}} = \int \frac{\text{sen}\,x\,dx}{\cos x(1 + \text{sen}\,x)} = \int \frac{\frac{2z}{1 + z^2}\cdot\frac{2dz}{1 + z^2}}{\frac{1 - z^2}{1 + z^2}\left(1 + \frac{2z}{1 + z^2}\right)} = \int \frac{4z\,dz}{(1 - z^2)(1 + z^2 + 2z)} =$$

$$= \int \frac{4z\,dz}{(1 - z^2)(1 + z)^2} = \int \frac{4z\,dz}{(1 - z)(1 + z)^3}$$

Desarrollando $4z/(1-z)(1+z)^3$ en fracciones parciales, se encuentra que

$$\frac{4z}{(1-z)(1+z)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{2}{(1+z)^3}$$

Entonces $$I = -\frac{1}{2}\ln|1-z| + \frac{1}{2}\ln|1+z| - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| - \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} + C$$

II. La integral se puede escribir como

$$\int\frac{\operatorname{sen} x\cos x\,dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen} x)} = \int\frac{\operatorname{sen} x\,d(\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen}^2 x)(1+\operatorname{sen} x)} = \int\frac{u\,du}{(1-u)(1+u)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{du}{1-u} + \frac{1}{4}\int\frac{du}{1+u} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1+u)^2} = -\frac{1}{4}\ln\left|1-u\right| + \frac{1}{4}\ln\left|1+u\right| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2(1+\operatorname{sen} x)} + C$$

Nota. Verifique que los dos resultados son equivalentes.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcule las siguientes integrales empleando el teorema de sustitución recíproca. Verifique el resultado por derivación.

1. $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C.$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a} + C.$

Calcule las siguientes integrales empleando el teorema de sustitución recíproca y las sustituciones indicadas.

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}),\ g(t) = t^2.$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{a+b\sqrt{x}} = \frac{2}{b^2}\left[b^2\sqrt{x} - a\ln|a+b\sqrt{x}|\right],\ g(t) = t^2.$

6. $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2},\ g(t) = t^2-1.$

7. $\displaystyle\int\frac{x^{1/3}\,dx}{x^{1/3}+1} = \frac{3}{2}(x^{2/3} - 3x^{1/3} + 1) + 3\ln|x^{1/3}+1|,\ g(t) = t^3.$

8. Muestre que la sustitución $t = (a+bx^n)^{p/q}$ racionaliza el integrando de $\int x^m(a+bx^n)^{p/q}$, si $\dfrac{m+1}{n}$ es entero.

Halle las siguientes integrales:

9. $\displaystyle\int\frac{d\theta}{3+2\cos 2\theta}.$ *Resp.:* $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{5}} + C$

10. $\int \frac{dx}{3 \sec x + 5}$. *Resp.:* $\frac{x}{5} + \frac{3}{20} \ln \left| \frac{\text{arc tg} \frac{x}{2} - 2}{\text{arc tg} \frac{x}{2} + 2} \right| + C$

11. $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos x + \operatorname{sen} x}$. *Resp.:* $\text{arc tg} \left[\frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) \right] + C$

12. $\int \frac{d\theta}{7 + 8 \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}$. *Resp.:* $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{3 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{5 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right| + C$

13. $\int \frac{d\theta}{a \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta}, a > 0, b \neq 0$. *Resp.:* $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - b}{\sqrt{a^2 + b^2} - a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + b} \right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}$. *Resp.:* $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C = \frac{1}{4} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

$- \frac{1}{2(1 + \cos x)} + C$

15. $\int \frac{3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x}{2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x} dx$. *Resp.:* $\frac{12}{13} x - \frac{5}{13} \ln |2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x| + C$

16. $\int \frac{2 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx$. *Resp.:* $- \ln |\cos x - \operatorname{sen} x| + C$

17. $\int \frac{dx}{3 \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos^2 x}$. *Resp.:* $\frac{1}{\sqrt{5}} \text{arc tg} \left(\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} \right) + C$

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x}$. *Resp.:* $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2 \operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C$

19. $\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{(1 - \cos x)^3}$. *Resp.:* $- \frac{1}{2(1 - \cos x)^2} + C$

20. $\int \frac{dx}{(2 - \operatorname{sen} x)(3 - \operatorname{sen} x)}$. *Resp.:* $\frac{2}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}}$

21. $\int \frac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} dx$. *Resp.:* $- x + 2 \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| + C$

22. $\int \frac{\cos 2x \, dx}{\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x}$. *Resp.:* $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{2} - \operatorname{sen} 2x} + C$

CAPITULO 8

Fracciones racionales

En este capítulo se van a calcular las primitivas de $f(x)/g(x)$, con $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con coeficientes reales y $g(x)$ expresable como un producto de factores lineales y cuadráticos. Si el grado de $f(x)$ es menor que el de $g(x)$, la división permite escribir la fracción $f(x)/g(x)$ en la forma

$$f(x)/g(x) = q(x) + r(x)/g(x) \tag{8-1}$$

siendo $q(x)$ el cociente y $r(x)$ el residuo. Como el cálculo de una primitiva de $q(x)$ es fácil, el problema de hallar una primitiva de $f(x)/g(x)$ se reduce al de hallar una primitiva del cociente de polinomios cuyo numerador es de menor grado que el del denominador.

Por ejemplo, el cociente $\dfrac{2x^4 - 3x + 5}{x(x^2 + 1)}$ se puede expresar en la forma

$$\frac{2x^4 - 3x + 5}{x(x^2 + 1)} = 2x + \frac{-2x^2 - 3x + 5}{x(x^2 + 1)}$$

Supongamos que se quiere hallar una primitiva de $f(x)/g(x)$, siendo el grado de $f(x)$ menor que el grado de $g(x)$ y $g(x)$ un producto de factores lineales. El caso más simple se presenta cuando estos factores lineales son todos distintos y de la forma $x - a$. Más adelante mostraremos que en estas condiciones, si $g(x)$ es de la forma $c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$, entonces el cociente $f(x)/g(x)$ se puede escribir en la forma

$$\frac{f(x)}{c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} \tag{8-2}$$

siendo $A_1, A_2, \dots, A_n$, constantes. El término del segundo miembro de (8-2) se llama descomposición en fracciones parciales del término del primer miembro de (8-2). El procedimiento más sencillo para hallar las A_i es multiplicar la identidad (8-2) por el denominador $g(x)$ para obtener la identidad

$$f(x) = cA_1(x - a_2) \dots (x - a_n) + cA_2(x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_n) + \dots + cA_n(x - a_1) \dots (x - a_{n-1}) \tag{8-3}$$

que es verdadera para todo x. Uno de los procedimientos es igualar los coeficientes correspondientes de los dos miembros de (8-3). Otro es remplazar por x los valores $a_1, a_2, \dots, a_n$. Otro es una combinación de los dos anteriores.

Por ejemplo, $\dfrac{x^2 - 23x + 60}{(x-1)(x-3)(x+2)}$ se puede escribir como

$$\frac{x^2 - 23x + 60}{(x-1)(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2}$$

Multiplicando por el denominador del primer miembro y haciendo $x = 1$, $x = 3$ y $x = -2$, en la expresión resultante se encuentra que $A = 2$, $B = -5$ y $C = 4$. Entonces

$$\frac{x^2 - 23x + 60}{(x-1)(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-5}{x-3} + \frac{4}{x+2}$$

Los factores lineales repetidos se tratan como si fueran factores lineales distintos. La diferencia está en que si $(x - a)$ es un factor lineal que se repite k veces en el denominador, entonces en vez de tener un solo término en el desarrollo en fracciones parciales correspondiente a $x - a$ se tienen k términos

$$\frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-a)^k} \tag{8-4}$$

con $B_1, B_2, \dots, B_n$ constantes. Si hay factores lineales distintos de los cuales alguno o todos se repiten, entonces los factores lineales distintos se tratan de la misma manera y en forma independiente y los términos resultantes se suman.

Por ejemplo, $\dfrac{x^3 - x^2 - x}{(x-1)^3(x-2)^2}$ se puede escribir como:

$$\frac{x^3 - x^2 - x}{(x-1)^3(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2}$$

Multiplicando por el denominador del primer miembro, y en la expresión resultante haciendo $x = 1$ y $x = 2$, se obtiene $C = -1$, $E = 2$, $B = -2$, $D = 1$ y $A = -1$. Entonces

$$\frac{x^3 - x^2 - x}{(x-1)^3(x-2)^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

Factores cuadráticos

Por factor cuadrático real de un polinomio $g(x)$ se entiende una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ si su discriminante $b^2 - 4ac < 0$; es decir, no se puede descomponer en producto de dos factores lineales reales. Por ejemplo, $x^2 - 3x + 4$ no se puede factorizar en factores lineales reales.

El tratamiento de los factores cuadráticos es parecido al de los factores lineales, excepto en que los numeradores de las fracciones racionales son polinomios de primer grado en vez de constantes.

El caso más simple es hallar una primitiva del cociente $f(x)/g(x)$, de polinomios reales, con el grado de $f(x)$ menor que el grado de $g(x)$ y $g(x)$ contiene factores cuadráticos. Este tipo de primitivas da lugar a dos casos: *a)* $f(x)/g(x)$, con $f(x) = cg'(x)$, c una constante, y *b)* $f(x)/g(x)$, con el grado de $f(x)$ menor que el grado de $g(x)$ y *a)* falsa.

Para hallar las primitivas del cociente $f(x)/g(x)$, siendo el grado de $f(x)$ menor que el grado de $g(x)$ y $g(x)$ un producto de factores cuadráticos distintos,

$$g(x) = \gamma(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2) \dots (x^2 + b_nx + c_n)$$

En este caso la fracción $f(x)/g(x)$ se puede escribir en la forma

$$\frac{f(x)}{\gamma(x^2+b_1x+c_1)\dots(x^2+b_nx+c_n)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+b_2x+c_2}+\dots+\frac{A_nx+B_n}{x^2+b_nx+c_n} \tag{8-5}$$

con $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$ constantes. Para hallar las constantes A_i, B_i, se emplean técnicas similares a las indicadas anteriormente.

Por ejemplo, $\frac{2x^3-3x^2-36x-67}{(x^2+6x+17)(x^2-2x+3)}$ se puede descomponer en la forma

$$\frac{2x^3-3x^2-36x-67}{(x^2+6x+17)(x^2-2x+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+6x+17}+\frac{(x+1)}{x^2-2x+3}$$

Para hallar las constantes, se multiplica por el denominador del primer miembro, se identifican los coeficientes correspondientes de las mismas potencias de x y se resuelve el sistema resultante, de donde $B=6$, $D=-5$, $C=0$ y $A=2$. Entonces

$$\frac{2x^3-3x^2-36x-67}{(x^2+6x+17)(x^2-2x+7)}=\frac{2x+6}{x^2+6x+17}+\frac{-5}{x^2-2x+3}$$

Si los factores cuadráticos se repiten se manejan en forma similar al de los factores lineales repetidos: si x^2+bx+c es un factor cuadrático que se repite k veces en el denominador, entonces el término de (8-5), que contiene únicamente el término x^2+bx+c, se remplaza por k términos de la forma

$$\frac{C_1x+D_1}{x^2+bx+c}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+bx+c)^2}+\dots+\frac{C_kx+D_k}{(x^2+bx+c)^k} \tag{8-6}$$

siendo $C_1, D_1, \dots, C_k, D_k$, constantes.

Por ejemplo, $\frac{x^3-3x^2-2}{(x^2+4)^2}$ se puede escribir como

$$\frac{x^3-3x^2-2}{(x^2+4)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

Multiplicando por el denominador del primer miembro, identificando coeficientes y resolviendo el sistema resultante, se encuentra que $A=1$, $B=-3$, $C=-4$ y $D=10$. Entonces

$$\frac{x^3-3x^2-2}{(x^2+4)^2}=\frac{x-3}{x^2+2}+\frac{-4x+10}{(x^2+4)^2}$$

Pruebas de la descomposición en fracciones parciales

Vamos a demostrar los dos resultados básicos, dos lemas, uno para los factores lineales y otro para los factores cuadráticos.

En la demostración del Lema 1 se hace uso del teorema del factor, que dice que si $\phi(x)$ es un polinomio y a un real, entonces $x-a$ es un factor de $\phi(x)$ ssi $\phi(a)=0$.

Lema 1. Si $f(x)$ y $\phi(x)$ son polinomios reales, $a \in \mathbf{R}$, y si $x-a$ es un factor de $\phi(x)$, entonces existe una constante real A y un polinomio real $\psi(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{(x-a)\phi(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{\psi(x)}{\phi(x)} \text{ o } f(x)=A\phi(x)+(x-a)\psi(x)$$

Demostración. Defina $A = f(a)/\phi(a)$. Entonces $f(a) - A\phi(a) = 0$ y el polinomio $f(x) - A\phi(x)$ tiene a $x - a$ como factor. Si $\psi(x)$ es el otro factor, tal que $f(x) - A\phi(x) = (x - a)\,\psi(x)$, entonces queda demostrada la segunda expresión.

Corolario. Con las mismas hipótesis del Lema 1 y si n es un entero positivo, entonces existen n constantes reales $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y un polinomio real $\psi(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n\phi(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{\psi(x)}{\phi(x)} \tag{8-7}$$

Demostración. Por el Lema 1 existen A_n y ψ_1 tales que

$$\frac{f(x)}{(x-a)\phi(x)} = \frac{A_n}{x-a} + \frac{\psi_1(x)}{\phi(x)}$$

De nuevo por el Lema 1, existen A_{n-1} y ψ_2 tales que

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2\phi(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^2} + \frac{\psi_1(x)}{(x-a)\phi(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^2} + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\psi_2(x)}{\phi(x)}$$

Y, de nuevo por el Lema 1, existen A_{n-2} y ψ_3 tales que

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3\phi(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^3} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^2} + \frac{\psi_2(x)}{(x-a)\phi(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^3} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^2} + \frac{A_{n-2}}{x-a} + \frac{\psi_3(x)}{\phi(x)}$$

repitiendo n veces, queda demostrada (8-7) con $\psi(x) = \psi_n(x)$.

Lema 2. Si $f(x)$ y $\phi(x)$ son polinomios reales, $x^2 + bx + c$ es un polinomio cuadrático real con $b^2 - 4ac < 0$, y si $x^2 + bx + c$ no es un factor cuadrático de $\phi(x)$, entonces existen constantes reales A y B y un polinomio real $\psi(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{(x^2+bx+c)\phi(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} + \frac{\psi(x)}{\phi(x)} \quad \text{o} \quad f(x) = (Ax+B)\phi(x) + (x^2+bx+c)\psi(x)$$

Demostración. Por analogía con la demostración del Lema 1, el problema consiste en hallar constantes A y B tales que $x^2 + bx + c$ es un factor del polinomio $f(x) - (Ax + B)\phi(x)$. Dividiendo $\phi(x)$ y $f(x)$ por $x^2 + bx + c$, y escribiendo:

$$\begin{cases} \phi(x) = q_1(x)(x^2+bx+c) + px + r, \text{ con } p^2 + r^2 > 0 \\ f(x) = q_2(x)(x^2+bx+c) + sx + t \end{cases} \tag{8-8}$$

El problema equivalente es ahora hallar A y B para que $x^2 + bx + c$ sea un factor de

$$(Ax+B)(px+r) - (sx+t) = (pA)x^2 + (rA + pB - s)x + (rB - t) \tag{8-9}$$

Hay dos casos: *a)* $p = 0$, *b)* $p \neq 0$.

Caso *a)* Si $p = 0$, entonces $r \neq 0$, y si $Ax + B = (sx + t)/r$, entonces el polinomio (8-9) es el polinomio nulo, del cual $x^2 + bx + c$ es un factor.

Caso *b)* Si $p \neq 0$, multiplicando $x^2 + bx + c$ por pA se hallan las constantes A y B tales que $pAx^2 + bpAx + cpA$ sea idéntico a (8-9); por tanto, $rA + pB - s = bpA$ y $rB - t = cpA$, o

$$\begin{cases} (r - bp)A + pB = s \\ -cpA + rB = t \end{cases}$$

Este sistema tiene una solución única según la regla de Cramer para A y B si

$$\begin{vmatrix} r - bp & p \\ -cp & r \end{vmatrix} = r^2 - bpr + cp^2 \neq 0$$

Esta condición la verifica la hipótesis $b^2 - 4ac < 0$ y $p \neq 0$, porque

$$r^2 - bpr + cp^2 = \left(r - \frac{1}{2}bp\right)^2 + \frac{1}{4}(-b^2 + 4c)p^2 \geq \frac{1}{4}(-b^2 + 4c)p^2 > 0$$

Corolario. Con las mismas hipótesis del Lema 2, si n es un entero positivo, entonces existen $2n$ constantes reales $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n$ y un polinomio real $\psi(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{(x^2 + bx + c)^n \phi(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + bx + c} + \ldots + \frac{A_n x + B_n}{(x^2 + bx + c)^n} + \frac{\psi(x)}{\phi(x)}$$

Demostración. La demostración es idéntica, excepto detalles menores, a la del corolario del Lema 1.

La integración de funciones racionales conduce a cuatro tipos de primitivas:

1. De monomios, del tipo $a_n x^n$, con $a_n \in \mathbf{R}$ y $n \in \mathbf{N}$. Para las cuales sabemos que

$$\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2. De elementos de primera especie, del tipo

$$\frac{b}{(x-a)^n}\,;\; b, a \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}^*$$

Entonces

$$n > 1 \Rightarrow \int \frac{b}{(x-a)^n} dx = \frac{b}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$$

$$n = 1 \Rightarrow \int \frac{b}{x-a} dx = b \ln |x - a|$$

3. De elementos de segunda especie, del tipo

$$\frac{ax + b}{[(x-u)^2 + v^2]^n}\,;\; a, b, u, v \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}^*$$

Para calcular la primitiva de dicho elemento se escribe en la forma

$$\frac{a(x-u)}{[(x-u)^2 + v^2]^n} + \frac{au + b}{[(x-u)^2 + v^2]^n}$$

Para el primer término se tiene

$$n > 1 \Rightarrow \frac{a}{2} \int \frac{2(x-u)dx}{[(x-u)^2 + v^2]^n} = \frac{a}{2(1-n)} \frac{1}{[(x-u)^2 + v^2]^{n-1}}$$

$$n = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} \int \frac{2(x-u)dx}{(x-u)^2 + v^2} = \frac{a}{2} \ln [(x-u)^2 + v^2]$$

4. Queda por calcular una primitiva, del tipo

$$\int \frac{a_k x + b_k}{[(x-u)^2 + v^2]^k} \; ; \; u \pm vi, \text{ raiz de multiplicidad } k$$

Por reducción,

$$\int \frac{a_k x + b_k}{[(x-u)^2 + v^2]^k}\, dx = \int \frac{a_k(x-u)}{[(x-u)^2 + v^2]^k}\, dx + \int \frac{b_k + a_k u}{[(x-u)^2 + v^2]^k}\, dx =$$

$$= \frac{a_k}{2}\,\frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{[(x-u)^2 + v^2]^{k-1}} + [b_k + a_k u]\, I_k,$$

$$I_k = \int \frac{dx}{[(x-u)^2 + v^2]^k} = \int \frac{dt}{[t^2 + v^2]^k} = \frac{1}{v^2}\int \frac{v^2 + t^2 - t^2}{[t^2 + v^2]^k}\, dt = \frac{1}{v^2}$$

$$I_{k-1} - \frac{1}{v^2}\int \frac{t^2 dt}{[t^2 + v^2]^k}$$

que integrando por partes $\left(z = t,\ dw = \dfrac{t dt}{[t^2 + v^2]^k}\right)$ conduce a la relación recurrente

$$v^2 I_k = \frac{t}{2(x-1)[t^2 + v^2]^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}\, I_{k-1}$$

Como se comprende, en el caso de existencia de raíces complejas múltiples este procedimiento, aunque teóricamente posible, es prácticamente inabordable. En este caso sobre todo, y en general, es aconsejable el siguiente método.

Método de Hermite

El desarrollo teórico anterior demuestra que la primitiva de una fracción racional propia $f(x)/g(x)$ se compone de una parte racional $\dfrac{\psi(x)}{\phi(x)}$ [las raices de $\phi(x)$ son las de $g(x)$ con grados respectivos de multiplicidad disminuidos en una unidad y el grado de $\psi(x)$ es, como máximo, inferior en una unidad al de $\phi(x)$] y de las primitivas que corresponden a las fracciones simples originadas por todas las raíces, consideradas con multiplicidad 1. Es decir,

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \frac{\psi(x)}{\phi(x)} + \int \frac{A}{x-a}\, dx + \ldots + \int \frac{L}{x-l}\, dx + \int \frac{Mx + N}{(x-u)^2 + v^2}\, dx + \ldots +$$

$$+ \int \frac{Tx + U}{(x-w)^2 + z^2}\, dx$$

Para determinar $A, \ldots, L, M, MN, \ldots, T, U$ y los coeficientes de $\psi(x)$, se derivan ambos miembros y se procede a identificarlas. Se obtiene un sistema con igual número de ecuaciones que incógnitas, que es siempre compatible y determinado.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 8-1 (Factores lineales distintos.) Halle $I = \int \frac{(2x+7)\,dx}{(x-1)(x+2)(x-3)}$.

Solución. Suponga que $\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$.

Entonces $\quad 2x + 7 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)$

Como la identidad se debe verificar para todos los valores de x.

$$\begin{aligned} x &= 1 &\Rightarrow\quad 2+7 &= A(3)(-2) &\Rightarrow A &= -3/2 \\ x &= -2 &\Rightarrow\quad -4+7 &= B(-3)(-5) &\Rightarrow B &= 1/5 \\ x &= 3 &\Rightarrow\quad 6+7 &= C(2)(5) &\Rightarrow C &= 13/10 \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{(2x+7)\,dx}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \int\left(\frac{-3/2}{x-1} + \frac{1/5}{x+2} + \frac{10/13}{x-3}\right)dx = -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1} +$$
$$+ \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{13}{10}\int\frac{dx}{x-3} = -\frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{5}\ln|x+2| + \frac{13}{10}\ln|x-3| + C$$

Problema 8-2 (Factores lineales repetidos.) Halle $I = \int \frac{(x^2+2x+3)\,dx}{x^3(x-1)(x+3)^2}$.

Solución. Correspondiente a $(x+3)^2$ se introducen fracciones con $(x+3)^2$ y todas las potencias menores. Algo análogo para x^3.

Entonces $\quad \frac{x^2+2x+3}{x^3(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+3} + \frac{F}{(x+3)^2}$

$$x^2 + 2x + 3 = A(x-1)(x+3)^2 + Bx(x-1)(x+3)^2 + Cx^2(x-1)(x+3)^2 + Dx^3(x+3)^2 +$$
$$+ Ex^3(x-1)(x+3) + Fx^3(x-1) = A(x^3 + 5x^2 + 3x - 9) + B(x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x) +$$
$$+ C(x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 9x^2) + D(x^5 + 6x^4 + 9x^3) + E(x^5 + 2x^4 - 3x^3) + F(x^4 - x^3)$$

Por tanto,
1. $C + D + E = 0.$
2. $A + 5B + 3C + 9D - 3E - F = 0.$
3. $A + 5B + 3C + 9D - 3E - F = 0.$
4. $5A + 3B - 9C = 1.$
5. $3A - 9B = 2.$
6. $-9A = 3.$

De 6, $A = -1/3$; remplazando este valor en 5 se obtiene $B = -1/3$. Remplazando estos dos valores en 4 se obtiene $C = -11/27$. 1, 2 y 3 se convierten en

$$D + E = \frac{11}{27}\ ;\ 6D + 2E + F = \frac{64}{27}\ ;\ 9D - 3E - F = \frac{29}{9}$$

$$15D - E = \frac{251}{27}\ ;\ 16D = \frac{162}{27}$$

$$D = \frac{3}{8}\ ;\ E = \frac{7}{216}\ ;\ F = \frac{1}{18}$$

Por tanto, $\int \frac{(x^2+2x+3)\,dx}{x^3(x-1)(x+3)^2} = -\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^3} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2} - \frac{11}{27}\int\frac{dx}{x} + \frac{3}{8}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{7}{216}\int\frac{dx}{x+3} +$

$$+ \frac{1}{18}\int\frac{dx}{(x+3)^2} = \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{x+3} - \frac{11}{27}\ln|x| + \frac{3}{8}\ln|x-1| + \frac{7}{216}\ln|x+3| + C.$$

Problema 8-3 (Factores cuadráticos diferentes.) Halle $I = \int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+2x+5)}$.

Solución. $\frac{x}{(x+1)(x^2+2x+5)} \equiv \frac{A}{x+1} \quad \frac{C_x + D}{x^2+2x+5}$. Entonces

$$x \equiv A(x^2+2x+5) + C(Cx+D)(x+1)$$

$\therefore\ A + C = 0 \Rightarrow A = -C,\ D = 5C.$

$2A + C + D = 1\ ;\ -2C + C + 5C = 1\ ;\ 5A + D = 0\ ;\ C = \frac{1}{4}\ ;\ A = -\frac{1}{4}\ ;\ D = \frac{5}{4}$

Entonces
$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+2x+5)} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+2x+5} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} + C$$

Problema 8-4 (Factores de segundo grado repetidos.) Halle

$$I = \int \frac{(x^2 - x + 1)\,dx}{(x-1)(x^2+2x+5)^2}.$$

Solución. $\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)(x^2+2x+5)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+5)^2}$.

Igualando los coeficientes de las potencias de x, tenemos:

1. $A + B = 0.$
2. $4A + B + C = 0.$
3. $14A + 3B + C + D = 1.$
4. $20A - 5B + 3C - D + E = -1.$
5. $25A - 5C - E = 1.$

De 2, $A = -B$, y de 3, $C = -3A$; de 6, $E = 40A - 1$, y de 4, $D = 1 - 8A$.

Remplazando en 5, $20A + 5A - 9A + 8A - 1 + 40A - 1 = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{64}\ ;\ B = -\frac{1}{64}\ ;\ C = -\frac{3}{64}\ ;$
$D = \frac{7}{8}\ ;\ E = -\frac{3}{8}.$

Haciendo $x = 1$ en:

$$x^2 - x + 1 = A(x^2+2x+5)^2 + (Bx+E)(x-1)(x^2+2x+5) + (Dx+E)(x-1) =$$
$$= A(x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 20x + 25) + (Bx+C)(x^3 + x^2 + 3x - 5) + (Dx+E)(x-D)$$

se obtiene $A = \frac{1}{64}$, y usando este valor en 1, 3, 4 y 5, se abrevia el trabajo.

$$\therefore \int \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)(x^2+2x+5)^2}\,dx = \frac{1}{64}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\left(-\frac{x}{64} - \frac{3}{64}\right)dx}{x^2+2x+5} + \int \frac{\left(\frac{7}{8}x - \frac{3}{8}\right)dx}{(x^2+2x+5)^2} =$$

$$= \frac{1}{64}\ln|x-1| - \frac{1}{128}\ln|x^2+2x+1| - \frac{1}{64}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} - \frac{7}{16}\cdot\frac{1}{x^2+2x+5} - \frac{10}{8}\int \frac{dx}{[(x+1)^2+4]^2}$$

Sea $x + 1 = 2\operatorname{tg}\theta$, $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$. Entonces

$$\int \frac{dx}{[(x+1)^2+4]^2} = 2\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(4\operatorname{tg}^2\theta + 4)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\, d\theta = \frac{1}{32}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\theta}{16} + C$$

$\sqrt{x^2+2x+5}$

$x+1$

2

Por consiguiente, $I = \frac{1}{64}\ln|x-1| - \frac{1}{128}\ln|x^2+2x+5| - \frac{3}{32}\operatorname{arc tg}\frac{x+1}{2} - \frac{1}{32}\,\frac{5x+19}{x^2+2x+5} + C.$

Problema 8-5 Halle $I = \int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x+3)^2}$.

Solución. $\frac{x^2+1}{(x+3)^3} = \frac{A}{(x+3)^3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow x^2 + 1 \equiv A + B(x+3) + C(x^2+6x+9)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 1 = A + 3B + 9C \\ 1 = C \\ 0 = B + 6C \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = 1 \\ B = -6 \\ A = 10 \end{array}$$

Entonces $$I = \int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x+3)^3} = 10\int \frac{dx}{(x+3)^3} - 6\int \frac{dx}{(x+2)^2} + \int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{-5}{(x+3)^2} + \frac{6}{x+3} + \ln(x+3) + C$$

Compare este procedimiento con el cálculo de la integral por medio de la sustitución $x + 3 = z$.

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x+3)^3} = \int \frac{z^2 - 6z + 10}{z^3} = \int\left(\frac{1}{z} - \frac{6}{z^2} + \frac{10}{z^3}\right)dz = \ln|z| + \frac{6}{z} - \frac{5}{z^2} + C =$$

$$= \ln|x+3| + \frac{6}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2} + C$$

Problema 8-6 Determine $I = \int \frac{x^5\,dx}{(1+x^2)^3}$.

Solución. El denominador presenta un par de raíces triples conjugadas $x = \pm i$. Aplicando el método de Hermite,

$$I = \int \frac{x^5\,dx}{(1+x^2)^3} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(1+x^2)^2} + \int \frac{Mx+N}{1+x^2}$$

Derivando ambos miembros con relación a x se obtiene

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3} = \frac{(3ax^2 + 2bx + c)(1+x^2) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)4x + (Mx+N)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^3}$$

e identificando los numeradores tenemos que $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = \frac{3}{4}$, $M = 1$, $N = 0$.

Por tanto, $I = \frac{x^2 + \frac{3}{4}}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{x^2 + \frac{3}{4}}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$

Problema 8-7 Determine $I = \int \frac{dx}{x^6+1}$.

Solución. Las raíces del denominador son $1 + x^6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-1} \Rightarrow x_1 = i,\ x_2 = -i,\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$ $x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} i,\ x_5 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i,\ x_6 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i.$

La factorización del denominador es

$$1 + x^6 = (1 + x^2)\left[\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]\left[\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] = (1 + x^2)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x + x\sqrt{3} + 1)$$

Por tanto, $$I = \int \frac{Mx + N}{1 + x^2}\,dx + \int \frac{Px + Q}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + \int \frac{Rx + S}{x^2 + x\sqrt{3} + 1}\,dx = \int \frac{dx}{1 + x^6}.$$

Derivando e identificando,

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)dx}{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{-x\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{2}\ln(x^2 - x\sqrt{3} + 1) + 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{arc\,tg}(2x - \sqrt{3})\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + x\sqrt{3} + 1) + 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{arc\,tg}(2x + \sqrt{3})\right] + C$$

Problema 8-8 Halle $I = \int \frac{x^2\,dx}{1 + x^4}$.

Solución. $1 + x^4 = 1 + x^4 + 2x^2 - 2x^2 = (1 + x^2)^2 - 2x^2 = (1 + x^2 - x\sqrt{2})(1 + x^2 + x\sqrt{2}).$

Entonces $$I = \int \frac{x^2\,dx}{1 + x^4} = \int \frac{Ax + B}{x(1 + x^2 - x\sqrt{2})}\,dx + \int \frac{Cx + D}{(1 + x^2 + x\sqrt{2})}\,dx.$$

Derivando e identificando se tiene que

$$x^2 = (Ax + B)(1 + x^2 + x\sqrt{2}) + (Cx + D)(1 + x^2 - x\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A + C = 0 \\ AB + D + A\sqrt{2} - C\sqrt{2} = 1 \\ B\sqrt{2} - D\sqrt{2} = 0 \\ B + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = D = 0 \\ A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ C = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \end{array}$$

Sustituyendo:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{x\,dx}{1 + x^2 - x\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{x\,dx}{1 + x^2 + x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\int \frac{x\,dx}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} -\right.$$

$$\left. - \int \frac{x\,dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\int \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx + \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx - \right.$$

$$\left. - \int \frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx + \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2} + 1) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C$$

Problema 8-9 Calcule $I = \int \frac{x^3\,dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

Solución. Esta integral es de la forma $\int f[g(x)]g'(x)\,dx$ con $g(x) = x^2$; entonces

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2)^2 + x^2 + 1}\,\frac{1}{2}\,2x\,dx$$

Haciendo $x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$ se transforma en $I = \frac{1}{2}\int \frac{u}{u^2 + u + 1}\,du$, que es una integral de fracción racional en u, de denominador con raíces imaginarias simples. Se hace aparecer en el numerador la derivada del denominador escribiendo:

$$u = \frac{1}{2}(2u + 1) - \frac{1}{2}$$

es decir,

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{2u + 1}{u^2 + u + 1}\,du - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2 + u + 1} = \frac{1}{4}\ln(u^2 + u + 1) - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2 + u + 1}$$

Para transformar la segunda integral en una de la forma $\int \frac{dz}{z^2 + m^2}$, se debe descomponer $u^2 + u + 1$ en cuadrados.

$$u^2 + u + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Por tanto,

$$\int \frac{du}{u^2 + u + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{u + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2u + 1}{\sqrt{3}} + C$$

Finalmente,

$$I = \frac{1}{4}\ln(u^2 + u + 1) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2u^2 + 1}{\sqrt{3}} +$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^4 + x^2 + 1) - \frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{arc tg}\,\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Problema 8-10 Calcule $I = \int \frac{2x^2 - 3x + 7}{x(x - 3)(x - 4)}\,dx$.

Solución. La descomposición de la fracción es

$$\frac{2x^2 - 3x + 7}{x(x - 3)(x - 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x - 4}$$

de donde $2x^2 - 3x + 7 = A(x - 3)(x - 4) + Bx(x - 4) + Cx(x - 3)$.

Haciendo $x = 0$, entonces $7 = 12A \Rightarrow A = \frac{7}{12}$

$x = 3$, entonces $16 = -3B \Rightarrow B = -\frac{16}{3}$

$x = 4$, entonces $27 = 4C \Rightarrow C = \frac{27}{4}$

Por consiguiente,

$$I = \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x} - \frac{16}{3}\int \frac{dx}{x - 3} + \frac{27}{4}\int \frac{dx}{x - 4} = \frac{7}{12}\ln x - \frac{16}{3}\ln(x - 3) + \frac{27}{4}\ln(x - 4) + C, \text{ si } x > 4$$

Si $3 < x < 4$, $I = \frac{7}{12}\ln x - \frac{16}{3}\ln(x - 3) + \frac{27}{4}\ln(4 - x) + C$.

Si $0 < x < 3$, $I = \frac{7}{12}\ln x - \frac{16}{3}\ln(3 - x) + \frac{27}{4}\ln(4 - x) + C$.

Si $x < 0$, $I = \frac{7}{12}\ln(-x) - \frac{16}{3}\ln(3 - x) + \frac{27}{4}\ln(4 - x) + C$.

Problema 8-11 Calcule $I = \int \frac{dx}{x^5 + 1}$.

Solución. El denominador se puede descomponer como

$$x^5 + 1 = (x + 1)\left(x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

Entonces

$$\frac{1}{x^5 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{px + q}{x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1} + \frac{p'x + q'}{x^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1}$$

lo cual implica

$$1 = A(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + (px + q)(x + 1)\left(x^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1\right) + (p'x + q')(x + 1)\left(x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

Haciendo $x = -1$, $1 = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$.

Identificando los demás coeficientes se obtiene

$$0 = A + p + p'$$

$$0 = -A + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}p + q + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}p' + q'$$

$$0 = -A + p + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}q + p' + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}q'$$

$$1 = A + q + q'$$

De lo cual deducimos:

$$\left.\begin{array}{l} p + p' = -\frac{1}{5}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}p + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}p' = -\frac{3}{5} \\ q + q' = \frac{4}{5}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}q + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}q' = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow p = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, p' = -\frac{1 - \sqrt{5}}{10}, q = \frac{2}{5}, q' = \frac{2}{5}$$

Entonces

$$I = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + \frac{2}{5}}{x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1}dx + \int \frac{-\frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + \frac{2}{5}}{x^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1}dx$$

Para calcular la segunda integral y teniendo en cuenta que la derivada del denominador es $2x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

$$-\frac{1 + \sqrt{5}}{10}x + \frac{2}{5} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{20}\left(2x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + \frac{5 - \sqrt{5}}{20}$$

Entonces

$$J = \int \frac{-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + \frac{2}{5}}{x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1}dx = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\int \frac{2x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}{x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1}dx + \frac{5 - \sqrt{5}}{20}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1}$$

Para calcular esta última integral descompongamos el denominador en cuadrados:

$$x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1 = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{4}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \text{ arc tg } \frac{x - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}} + C =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \text{ arc tg } \frac{4x - (1 + \sqrt{5})}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + C$$

Entonces

$$J = -\frac{1+\sqrt{5}}{20}\ln\left(x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right) + \frac{5-\sqrt{5}}{20}\cdot\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-(1+\sqrt{5})}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} + C =$$

$$= -\frac{1+\sqrt{5}}{20}\ln\left(x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right) + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-(1+\sqrt{5})}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} + C$$

De la misma manera se encuentra que

$$\int\frac{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x + \frac{2}{5}}{x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1}dx = -\frac{1-\sqrt{5}}{20}\ln\left(x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right) + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-(1-\sqrt{5})}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + C$$

Finalmente, $I = \frac{1}{5}\ln(x+1) - \frac{1}{20}\ln(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{5}}{20}\ln\frac{x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1}{x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1} +$

$$+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-(1+\sqrt{5})}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-(1-\sqrt{5})}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + C$$

Problema 8-12 Calcule $I = \int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$.

Solución. Para calcular la integral que es de la forma $\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}$ hay que descomponer x^2+x+1 en cuadrados:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Haciendo $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}z \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dz$. Entonces $I = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\int\frac{dz}{(z^2+1)^3}$.

Como $1 = 1 + z^2 - z^2$ se puede escribir

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^3} = \int\frac{dz}{(1+z^2)^2} - \int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^3}$$

Integrando la última por partes con $z = u, \Rightarrow u' = 1$; $\frac{z}{(1+z^2)^3} = v'$, $v = -\frac{1}{4(1+z^2)^2}$. Entonces

$$\int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^3} = -\frac{z}{4(1+z^2)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

Por otra parte,

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int\frac{dz}{1+z^2} - \int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2}$$

Calculando esta última integral por partes con $z = u$, $u' = 1$, $v' = \frac{z}{(1+z^2)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+z^2}$. Entonces

$$\int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{z}{2(1+z)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z^2}.$$

De lo anterior deducimos que

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z + C$$

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^3} = \frac{z}{4(1+z^2)^2} + \frac{3}{4}\int\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{4(1+z^2)^2} + \frac{3z}{8(1+z^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} z + C.$$

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3\left[\frac{z(5 + 3z^2)}{8(1 + z^2)^2} + \frac{3}{8}\,\text{arc tg } z\right] + C$$ y remplazando z en función de x:

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3\left[\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{5 + (2x + 1)^2}{8(x^2 + x + 1)^2} + \frac{3}{8}\,\text{arc tg}\,\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right] + C =$$

$$= \frac{(2x + 1)(2x^2 + 2x + 3)}{6(x^2 + x + 1)^2} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\,\text{arc tg}\,\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

Problema 8-13 Halle $I = \int \frac{x\,dx}{x^6 - 1}$.

Solución. La integral es de la forma $\int f[g(x)]g'(x)\,dx$, con $g(x) = x^2$. Haciendo $x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$; por tanto, $I = \int \frac{du}{u^3 - 1}$.

Como $u^3 - 1 = (u - 1)(u^2 + u + 1)$, la fracción correspondiente es

$$\frac{1}{u^3 - 1} \equiv \frac{A}{u - 1} + \frac{pu + q}{u^2 + u + 1} \Rightarrow 1 = A(u^2 + u + 1) + (pu + q)(u - 1)$$

Haciendo $u = 1$, $1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$.

Identificando coeficientes, $0 = A + p \Rightarrow p = -\frac{1}{3}$ y $1 = A - q \Rightarrow q = -\frac{2}{3}$.

Entonces $I = \frac{1}{3}\int\frac{du}{u - 1} - \frac{1}{3}\int\frac{u + 2}{u^2 + u + 1}\,du$. Para calcular esta última integral, teniendo en cuenta que la derivada del denominador es $2u + 1$, entonces:

$$u + 2 = \frac{1}{2}(2u + 1) + \frac{3}{2}$$

Es decir,

$$\int\frac{u + 2}{u^2 + u + 1}\,du = \frac{1}{2}\int\frac{2u + 1}{u^2 + u + 1}\,du + \frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2 + u + 1} = \frac{1}{2}\ln(u^2 + u + 1) + \frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2 + u + 1}$$

Para calcular $\int\frac{du}{u^2 + u + 1}$ descomponemos el denominador en cuadrados:

$$u^2 + u + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\therefore \int\frac{du}{u^2 + u + 1} = \int\frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2u + 1}{\sqrt{3}} + C$$

Finalmente, $I = \frac{1}{3}\ln(u - 1) - \frac{1}{6}\ln(u^2 + u + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2u + 1}{\sqrt{3}} + C$, y en función de x,

$$I = \frac{1}{3}\ln(x^2 - 1) - \frac{1}{6}\ln(x^4 + x^2 + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}} + C, \text{ si } |x| > 1$$

Si $|x| < 1$ se remplaza $\ln(x^2 - 1)$ por $\ln(1 - x^2)$.

Problema 8-14 Determine $I = \int\frac{x^3 - 3x + 7}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}}\,dx$.

Solución. Sea $I = \int\frac{x^2 - 3x + 7}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}}\,dx = (ax + b)\sqrt{2x^2 + 4x + 5} + c\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}}$. Al derivar ambos miembros se obtiene

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}} = a\sqrt{2x^2 + 4x + 5} + (ax + b)\cdot\frac{2x + 4}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}} + \frac{c}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}}$$

Reduciendo a común denominador e identificando se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 4a = 1 \\ 6a + 2b = -3 \\ 5a + 2b + c = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{4}{9},\ c = \frac{41}{4}$$

Entonces $I = \frac{1}{4}(x - 9)\sqrt{2x^2 + 4x + 5} + \frac{41}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}}$.

Ahora $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{2}x + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + 1}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \operatorname{arg\,senh}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arg\,senh}\frac{2x + 2}{\sqrt{6}}$$

Sustituyendo, $I = \frac{1}{4}(x - 9)\sqrt{2x^2 + 4x + 5} + \frac{41}{4\sqrt{2}} \operatorname{arg\,senh}\frac{2x + 2}{\sqrt{6}}$.

Problema 8-15 Determine $I = \int \frac{(x^2 + 1) + x\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x^2\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$.

Solución. Sea $p(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$; entonces

$$\frac{(x^2 + 1) + xp(x)}{x^3 + x^2p(x)} = \frac{(x^2 + 1)x^2[x - p(x)] + x^3p(x)[x - p(x)]}{x^6 - x^4p^2(x)} = \frac{x^2 + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x^2} =$$

$$= \frac{1}{x + 1} + \frac{x^2 + x + 1}{(x^3 + x^2)\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

se multiplicó por la fracción $\frac{(x^3 - x^2p)}{(x^3 - x^2p)}$.

La descomposición de la fracción $\frac{x^2 + x + 1}{(x^3 + x^2)}$ da

$$R(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2(x + 1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

Identificando $A = 1$, $B = 0$, $C = 1 \Rightarrow R(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x + 1}$.

Sustituyendo en I,

$$I = \int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + x + 1}} + \int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}} = I_1 + I_2 + I_3$$

Para determinar I_2 se hace el cambio $x = \frac{1}{z} \Rightarrow dx = \frac{-1}{z^2}\, dz$, sustituyendo

$$I_2 = -\int \frac{dx}{z^2 \frac{1}{z^2}\sqrt{z^{-2} + z^{-1} + 1}} = -\int \frac{z\, dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}} = A\sqrt{z^2 + z + 1} + C\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}}$$

Derivando e identificando numeradores,

$$-2z = 2Az + A + 2C,\ A = -1,\ C = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo, $I_2 = -\sqrt{z^2+z+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}} = -\sqrt{z^2+z+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} =$

$= -\sqrt{z^2+z+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} = -\sqrt{z^2+z+1} + \frac{1}{2}\text{ arg senh } \frac{2z+1}{\sqrt{3}}$ con $z = \frac{1}{x}$. Para determinar I_3 se hace el cambio $1 + x = \frac{1}{z} \Rightarrow dx = -\frac{1}{z^2}\, dz$. Sustituyendo,

$$I_3 = -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - z + 1}} = -\text{ arg senh } \frac{2z-1}{\sqrt{3}} \quad \text{con } z = \frac{1}{1+x}$$

Finalmente, $I = \ln(x+1) - \frac{1}{x}\sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\text{ arg senh } \frac{x+2}{x\sqrt{3}} - \text{ arg senh } \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{3}}$.

Problema 8-16 Halle $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Solución. Haciendo $p(x) = -x^2 + 1$, $c = 1 > 0$ y $\sqrt{1-x^2} = zx + 1$; $1 - x^2 = z^2x^2 + 2zx + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow -x = z^2x + 2z \Rightarrow x = \frac{-2z}{1+z^2} \Rightarrow dx = \frac{-2(1+z^2)+4z^2}{(1+z^2)^2}\, dz = \frac{2(z^2-1)\, dz}{(z^2+1)^2}$. Sustituyendo,

$$I = \int \frac{(1+z^2)\, dz}{(1+z^2)^2 + 4z^2} = \int \frac{(1+z^2)\, dz}{(z^2+3+\sqrt{8})(z^2+3-\sqrt{8})}$$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{1+z^2}{(1+z^2)^2+4z^2} \equiv \frac{Mz+N}{(z^2+3+\sqrt{8})} + \frac{M_1z+N_1}{z^2+3-\sqrt{8}}$$

Reduciendo a común denominador e identificando, $1 + z^2 \equiv (Mz+N)(z^2+3-\sqrt{8}) + (M_1z+N_1)\cdot(z^2+3+\sqrt{8})$, que conduce al sistema

$$\left.\begin{array}{l} N + M_1 = 0 \\ N + N_1 = 1 \\ M(3-\sqrt{8}) + M(3+\sqrt{8}) = 0 \\ N(3-\sqrt{8}) + N_1(3+\sqrt{8}) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} M = M_1 = 0 \\ N = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}},\ N_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \end{array}$$

Sustituyendo,
$$I = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z^2+(3+\sqrt{8})} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z^2+(3-\sqrt{8})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}\text{ arc tg } \frac{z}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}\text{ arc tg } \frac{z}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}$$

Como $z = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$ se obtiene

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\text{arc tg } \frac{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}}{1+\sqrt{2}} + \text{arc tg } \frac{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}}{\sqrt{2}-1}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\;\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x(1+\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x(\sqrt{2}-1)}}{1 - \frac{(\sqrt{1-x^2}-1)^2}{x^2(\sqrt{2^2}-1)}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{ arc tg } \frac{\sqrt{2}x(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2-1+\sqrt{1-x^2}}$$

Problema 8-17 Halle *a)* $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$; *b)* $\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x(2 + \cos x)}\, dx$.

Solución. *a)* Sea $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arc\,tg} u \Rightarrow dx = 2\, du/(1 + u^2)$, $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big/\sec^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big/\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{2u}{1 + u^2}$ y $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \left[1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right]\Big/\left(\sec^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$. Entonces

$$a)\ \int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}\, dx = \int \frac{2u/(1 + u^2)}{1 + 2u/(1 + u^2) + (1 - u^2)/(1 + u^2)} \cdot \frac{du}{1 + u^2} =$$

$$= \int \frac{4u}{1 + u^2 + 2u + 1 - u^2} \cdot \frac{du}{1 + u^2} = \int \frac{2u\, du}{(1 + u^2)(1 + u)} = \int \left(\frac{u + 1}{u^2 + 1} - \frac{1}{u + 1}\right) du = \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) +$$

$$+ \operatorname{arc\,tg} u - \ln|u + 1| + C = \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1\right) + \frac{x}{2} - \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1\right| + C.$$

$$b)\ \int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x\,(2 + \cos x)}\, dx = \int \frac{1 + 2u/(1 + u^2)}{[2u/(1 + u^2)][2 + (1 - u^2)/(1 + u^2)]} \cdot \frac{du}{1 + u^2} =$$

$$= \int \frac{(1 + u^2)/(1 + u^2)}{2u(3 + u^2)/(1 + u^2)^2} \cdot \frac{du}{1 + u^2} = \int \frac{(1 + u)^2\, du}{u(u^2 + 3)} = \int \left(\frac{1}{3u} + \frac{2/3u + 2}{u^2 + 3}\right) du =$$

$$= \frac{1}{3}\ln u + \frac{1}{3}\ln(u^2 + 3) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{3}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] + C$$

Problema 8-18 Halle $\int \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{1/2} \frac{dx}{x}$.

Solución. Sea $\frac{x - 1}{x + 1} = u^2 \Rightarrow x = \frac{1 + u^2}{1 - u^2} \Rightarrow dx = \{[(1 - u^2)2u + (1 + u^2)2u]/(1 - u^2)^2\}\, du = \frac{4u\, du}{(1 - u^2)^2}$. Entonces $\int \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{1/2} \frac{dx}{x} = \int u\, \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \cdot \frac{4u\, du}{(1 - u^2)^2} = \int \frac{4u^2\, du}{1 - u^4} =$

$$= \int \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} - \frac{2}{1 + u^2}\right) du = \ln|1 + u| - \ln|1 - u| - 2 \operatorname{arc\,tg} u + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1 + [(x - 1)/(x + 1)]^{1/2}}{1 - [(x - 1)/(x + 1)]^{1/2}}\right| - 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{1/2} + C.$$

Problema 8-19 Calcule las siguientes integrales reduciéndolas a una función racional que se pueda integrar:

a) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x} - \sqrt[3]{1 + x}}$; *b)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 + 2x - 1}}$; *c)* $\int \frac{dx}{(x + a)^{3/2} + (x - a)^{3/2}}$

Solución. *a)* Sea $1 + x = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5\, dx$, y

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x} - \sqrt[3]{1 + x}} = \int \frac{(u^6 - 1)6u^5\, du}{u^3 - u^2} = \int \frac{6[u^3(u^6 - 1)]}{u - 1}\, du = \int 6(u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)u^3\, du =$$

$$= \frac{6u^9}{9} + \frac{6u^8}{8} + \frac{6u^7}{7} + \frac{6u^6}{6} + \frac{6u^5}{5} + \frac{6u^4}{4} + C = \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2} + \frac{3}{4}(1 + x)^{4/3} + \frac{6}{7}(1 + x)^{7/6} +$$

$$+ (1 + x) + \frac{6}{5}(1 + x)^{5/6} + \frac{3}{2}(1 + x)^{2/3} + C.$$

b) Se tiene que $x(3x^2+2x-1)^{1/2} = x(x+1)[(3x-1)/(x+1)]^{1/2}$ Se quiere hallar una función racional r tal que $(3x-1)/(x+1) = r^2(u)$ o $x = \dfrac{1+r^2(u)}{3-r^2(u)}$. Así r puede ser cualquier función racional. Tomemos a $r(u) = u$. Entonces $x = \dfrac{1+u^2}{3-u^2}$ y $dx = \dfrac{(3-u^2)2u+(1+u^2)2u}{(3-u^2)^2}\,du = \dfrac{8u\,du}{3-u^2}$. Por tanto,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} = \int \frac{1}{[(1+u^2)/(3-u^2)][(1+u^2)/(3-u^2)+1]u}\cdot\frac{8u\,du}{(3-u^2)^2} = 2\int\frac{du}{1+u^2}$$

c) Se quieren hallar funciones racionales r_1 y r_2 tales que $x+a = r_1^2(u)$ y $x-a = r_2^2(u)$. Esto implica que $r_1^2(u) - a = r_2^2(u) + a$. Si hacemos $r_1 = p_1 + q_1$ y $r_2 = p_2 + q_2$, la última ecuación se convierte en $p_1^2(u) + 2p_1(u)q_1(u) + q_1^2(u) - a = p_2^2(u) + 2p_2(a)q_2(u) + q_2^2(u)$. Si hacemos $2p_1(u)q_1(u) = a$ y $2p_2(u)q_2(u) = -a$, se obtiene $p_1^2(u) + q_1^2(u) = p_2^2(u) + q_2^2(u)$.

En esta última ecuación hagamos $p_1^2(u) = p_2^2(u) = \dfrac{au^2}{2}$ y $q_1^2(u) = q_2^2(u) = \dfrac{a}{2u^2}$. Entonces

$$r_1(u) = \sqrt{\frac{a}{2}}\left(u+\frac{1}{u}\right) \text{ y } r_2(u) = \sqrt{\frac{a}{2}}\left(u-\frac{1}{u}\right)$$

Entonces $r_1^2(u) = \dfrac{a}{2}\left(u^2+2+\dfrac{1}{u^2}\right)$ y $r_2^2(u) = \dfrac{a}{2}\left(u^2-2+\dfrac{1}{u^2}\right)$ o

$$x = \frac{a}{2}\left(u^2+2+\frac{1}{u^2}\right) - a = \frac{a}{2}\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)$$

Como $dx = \dfrac{a}{2}\left(2u - \dfrac{2}{u^3}\right)du$ se tiene que

$$\int\frac{dx}{(x+a)^{3/2}+(x-a)^{3/2}} = \int\frac{a\left(u-\frac{1}{u^3}\right)du}{\left(\frac{a}{2}\right)^{3/2}\left[\left(u+\frac{1}{u^3}\right)^3+\left(u-\frac{1}{u^3}\right)\right]} = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2}\int\frac{u^4-1}{u^6+3u^2}\,du$$

Problema 8-20 Halle $\displaystyle\int\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{dx}{[x(x^2+x+1)]^{1/2}}$ por medio de la sustitución $u^2 = x+1+\dfrac{1}{x}$.

Solución. Se tiene que $2u\,du = \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx = \left[\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)\right]dx$, entonces

$$\int\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{dx}{[x(x^2+x+1)]^{1/2}} = \int\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}} = \int\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2/x}$$

$$\frac{dx}{\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}} = \int\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{1}{x+1+\frac{1}{x}+1}\cdot\frac{dx}{\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}} = \int\frac{2u\,du}{(u^2+1)u} =$$

$$= 2\int\frac{du}{1+u^2} = 2\,\text{arc tg}\,u + C = 2\,\text{arc tg}\left(\left[x+1+\frac{1}{x}\right]^{1/2}\right) + C$$

Problema 8-21 Sean P y Q polinomios. Grado de $P \leq$ grado de Q. Muestre que si las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de Q son reales y distintas, entonces

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\log|x-\alpha_k| + C$$

Solución. Según (8-2) existe un desarrollo en fracciones parciales de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x - \alpha_k}$$

Ahora, $\dfrac{Q(x)}{x - \alpha_k} = \dfrac{Q(x) - Q(\alpha_k)}{x - \alpha_k} \to Q'(\alpha_k)$ si $x \to x_k$.

Como $(x - \alpha_k)\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x - \alpha_k}{x - \alpha_1} A_1 + \dots + A_k + \dots + \dfrac{x - \alpha_k}{x - \alpha_n} A_n$, entonces

$$\lim_{x \to x_k} P(x) \frac{x - \alpha_k}{Q(x)} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} = \lim_{x \to x_k} \left[\frac{x - \alpha_k}{x - \alpha_1} A_1 + \dots + A_k + \dots + \frac{x - \alpha_k}{x - \alpha_n} A_k \right] = A_k$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{P(x)\,dx}{Q(x)} = \int \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \frac{1}{x - \alpha_k} \right] dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \log |x - \alpha_k| + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Descomponga las siguientes fracciones en fracciones parciales:

1. $\dfrac{7x - 10}{(x - 4)(2x + 1)}$. *Resp.:* $\dfrac{2}{x - 4} + \dfrac{3}{2x + 1}$

2. $\dfrac{4x^2 - x - 8}{x^3 - x^2 - 2x}$. *Resp.:* $\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{-1}{x + 1}$

3. $\dfrac{4x^2 + 2x + 8}{x(x^2 + 2)^2}$. *Resp.:* $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2x}{x^2 + 2} + \dfrac{2}{(x^2 + 2)^2}$

4. $\dfrac{x^5}{(x^2 + 4)^2}$. *Resp.:* $x - \dfrac{8x}{x^2 + 4} + \dfrac{16x}{(x^2 + 4)^2}$

Halle las siguientes integrales:

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x + 1)^5}$. *Resp.:* $\dfrac{-1}{8(2x + 1)^4} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$. *Resp.:* $\operatorname{arc\,tg}(x + 1) + C$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$. *Resp.:* $\dfrac{-1}{x + 1} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$. *Resp.:* $\dfrac{x + 1}{2(x^2 + 2x + 2)} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(x + 1) + C$

9. $\displaystyle\int \frac{(3x + 5)\,dx}{(2x^2 + x + 1)^2}$. *Resp.:* $\dfrac{17x - 1}{7(2x^2 + x + 1)} + \dfrac{34}{7\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{4x + 1}{\sqrt{7}} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{(x - 1)\,dx}{x(x + 1)^2}$. *Resp.:* $\dfrac{-2}{x + 1} + \ln\left|\dfrac{x + 1}{x}\right| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{(6x^2 - 3x + 1)\,dx}{x^3 - x^2}$. *Resp.:* $2 \ln |x(x - 1)^2| + \dfrac{1}{x} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{(5x^2 - 3x + 1)\,dx}{x^3 + x}$. *Resp.:* $\ln |x(x^2 + 1)^2| - 3 \operatorname{arc\,tg} x + C$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 1}$.

14. $\displaystyle\int \frac{(5x^2 + 6x + 17)}{(x^2 + x + 1)^2(2 - x)}$.

Muestre que:

15. $\int \frac{(x^3 + x + 2)\,dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = \ln \frac{(x^2 + 1)}{2} + \frac{x}{x^2 + 1} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$

16. $\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln (x^2 + \sqrt{2}x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln (x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2}x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc\,tg} (-\sqrt{2}x + 1).$

17. $\int \frac{3x\,dx}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{-3}{4(x^2 + x + 1)^2} - \frac{8x + 4}{(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{4}{3} - \frac{12x + 6}{x^2 + x + 1} \sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{12}{x^2 + x + 1} + C.$

18. $\int \frac{x^4\,dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = x + \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{8}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} + C.$

19. $\int \frac{(5x + 3)\,dx}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{2} \ln (x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$

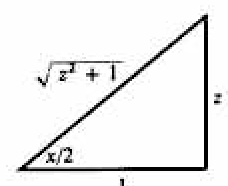
20. $\int \frac{(2x^2 + x + 1)\,dx}{(x^2 + 3)(2x^2 + x + 5)} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 3) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{39}} \operatorname{arc\,tg} \frac{4x + 1}{\sqrt{39}} - \frac{1}{2} \ln (2x^2 + x + 5) + C.$

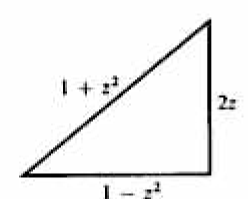
21. $\int \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{3} + \frac{\sqrt{13}}{12} \ln (x^2 + \sqrt{3}x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{12} \ln (x^2 - \sqrt{3}x + 1) + \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} (2x + \sqrt{3}) +$
$+ \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} (2x - \sqrt{3}) + C.$

CAPITULO 9

Integrales del tipo $I = \int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$

Como se verá en los problemas que siguen, muchas integrales se pueden simplificar por medio de la sustitución $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, o como se puede ver a partir del triángulo, por la sustitución $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$ y $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$. A partir de la relación $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \cos x$ se obtiene $\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ y $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ y $\operatorname{tg} x = \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$. Como $x = 2 \operatorname{arc\,tg} z$, entonces $dx = \frac{2dz}{1+z^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.





En resumen, $I = \int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = 2 \int \frac{R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) dz}{1+z^2}$, que es racional en z.

Nota 1. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es par en $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ (no se altera al sustituir simultáneamente $\operatorname{sen} x$ por $-\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por $-\cos x$), el cambio $\operatorname{tg} x = z$ la racionaliza.

Nota 2. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en $\cos x$ (cambia el signo al sustituir $\cos x$ por $-\cos x$), el cambio $\operatorname{sen} x = z$ la racionaliza.

Nota 3. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en $\operatorname{sen} x$ (cambia el signo al sustituir $\operatorname{sen} x$ por $-\operatorname{sen} x$), el cambio $\cos x = z$ la racionaliza.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 9-1 Halle $I = \int \frac{dx}{1 + \text{sen } x + \cos x}$.

Solución. $$\int \frac{dx}{1 + \text{sen } x + \cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 + \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{2z+1} = \ln|z+1| + C =$$

$$= \ln\left|\text{tg}\frac{x}{2} + 1\right| + C$$

Problema 9-2 Halle $I = \int \frac{dx}{4 + 2\cos 3x}$.

Solución. Sea $3x = u$ y $z = \text{tg}\frac{u}{2}$, entonces $I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{4 + 2\cos u} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4 + 2\frac{1-z^2}{1+z^2}} =$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dz}{6 + 2z^2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{arc tg}\frac{z}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{tg}\frac{u}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{arc tg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{tg}\left(\frac{3x}{2}\right)\right] + C$$

Problema 9-3 Halle $I = \int \frac{dx}{12 + 5\,\text{tg } x}$.

Solución. Sea $\text{tg}\frac{x}{2} = z$. Entonces $I = \int \frac{\frac{2dz}{z^2+1}}{12 + \frac{10z}{1-z^2}} = \int \frac{(z^2-1)\,dz}{(z^2+1)(6z^2-5z-6)} =$

$$= \int \frac{(z^2-1)dz}{(z^2+1)(3z+2)(2z-3)}$$

Ahora $\frac{z^2-1}{(z^2+1)(3z+2)(2z-3)} = \frac{Az+B}{z^2+1} + \frac{C}{3z+2} + \frac{D}{2z-3}$. De donde

$$z^2 - 1 = (Az+B)(6z^2-5z-6) + C(z^2+1)(2z-3) + D(z^2+1)(3z+2)$$

Haciendo en esta expresión $z = -\frac{2}{3}$; $C = \frac{15}{169}$. De $z = \frac{3}{2}$, $D = \frac{10}{169}$.

De los términos constantes, $-6B - 3C + 2D = -1$, $B = \frac{24}{169}$.

También de los términos de z^3, $6A + 2C + 3D = 0$, $A = -\frac{10}{169}$.

Entonces $I = \frac{1}{169}\int \frac{-10z+24}{z^2+1} + \frac{15}{169}\int \frac{dz}{3z+2} + \frac{10}{169}\int \frac{dz}{2z-3} =$

$$= -\frac{5}{169}\ln|z^2+1| + \frac{24}{169}\text{arc tg } z + \frac{5}{169}\ln|3z+2| + \frac{5}{169}\ln|2z-3| + C = -\frac{5}{169}\ln \sec^2\frac{x}{2} +$$

$$+ \frac{12x}{169} + \frac{5}{169}\ln\left|3\,\text{tg}\frac{x}{2} + 2\right| + \frac{5}{169}\ln\left|2\,\text{tg}\frac{x}{2} - 3\right| + C$$

Problema 9-4 Calcule $I = \int \frac{dx}{1 + 2\cos x}$.

Solución. Sea $\text{tg } \frac{x}{2} = z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$. Entonces $I = -2\int \frac{dz}{z^2 - 3}$.

Teniendo en cuenta la fórmula,

$$I = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{z - \sqrt{3}}{z + \sqrt{3}} \right) + C \text{ si } \left| \frac{z}{\sqrt{3}} \right| > 1 \text{ e } I = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} + z}{\sqrt{3} - z} + C \text{ si } \left| \frac{z}{\sqrt{3}} \right| < 1$$

Remplazando z en función de x, se obtiene

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\text{tg } \frac{x}{2} + \sqrt{3}}{\text{tg } \frac{x}{2} - \sqrt{3}} + C \text{ si } \text{tg } \frac{x}{2} > \sqrt{3} \text{ y } \text{tg } \frac{x}{2} < -\sqrt{3}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} + \text{tg } \frac{x}{2}}{\sqrt{3} - \text{tg } \frac{x}{2}} + C \text{ si } -\sqrt{3} < \text{tg } \frac{x}{2} < \sqrt{3}.$$

Problema 9-5 Halle $I = \int \frac{\text{sen } x\, dx}{1 + \text{sen } x}$.

Solución. Descomponiendo la fracción $\frac{\text{sen } x}{1 + \text{sen } x}$ en elementos simples se obtiene $\frac{\text{sen } x}{1 + \text{sen } x} = 1 - \frac{1}{1 + \text{sen } x}$. Entonces $I = \int dx - \int \frac{dx}{1 + \text{sen } x}$.

Para calcular la segunda integral hagamos $\text{tg } \frac{x}{2} = z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$.

Entonces $\int \frac{dx}{1 + \text{sen } x} = 2\int \frac{dz}{(z + 1)^2} = -2\frac{1}{z + 1} + C = -\frac{2}{\text{tg } \frac{x}{2} + 1} + C.$

Por tanto, $I = x - \frac{2}{\text{tg } \frac{x}{2} + 1} + C.$

Problema 9-6 Halle $I = \int \frac{dx}{a \cos x + b \text{ sen } x + C}$.

Solución. Esta integral es de la forma $\int R(\text{sen } x, \cos x, \text{tg } x)\, dx$.

Haciendo $\text{tg } \frac{x}{2} = z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$. Entonces $I = \int \frac{2dz}{(c - a)z^2 + 2bz + c + a}$.

Hay que distinguir dos casos, según que el denominador tenga raíces reales o imaginarias.

Primer caso. Raíces reales, es decir, $a^2 + b^2 > c^2$, se descompone la fracción racional en fracciones simples; para eso se determinan A y B tales que

$$\frac{2}{(c - a)z^2 + 2bz + c + a} = \frac{A}{z + \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a}} + \frac{B}{z + \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a}}$$

Entonces $2 = A\left(z + \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a}\right) + B\left(z + \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a}\right)$.

Haciendo $z = \frac{-b + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a} \Rightarrow 2 = \frac{2A\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a} \Rightarrow A = \frac{c - a}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}$.

Haciendo $z = \frac{-b - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a} \Rightarrow 2 = -\frac{2B\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a} \Rightarrow B = -\frac{c - a}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}$, lo cual da $\frac{2}{(c - a)z^2 + 2bz + c + a} = \frac{c - a}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \left(\frac{1}{z + \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a}} + \frac{1}{z + \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a}} \right)$

Por tanto, $I = \dfrac{c-a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\left(\displaystyle\int \frac{dz}{z+\dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-a}} - \int \frac{dz}{z+\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-a}}\right) =$

$$= \frac{c-a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\left[\ln\left(z+\frac{b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-a}\right) - \ln\left(z+\frac{b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-a}\right)\right] + C =$$

$$= \frac{c-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ln \frac{(c-a)z+b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-a)z+b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}} + C$$

Remplazando z en función de x, $I = \dfrac{c-a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \ln \dfrac{(c-a)\,\text{tg}\,\dfrac{x}{2}+b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-a)\,\text{tg}\,\dfrac{x}{2}+b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}} + C.$

$$\text{Si}\left|(c-a)\,\text{tg}\,\frac{x}{2}+b\right| > \sqrt{a^2+b^2-c^2}$$

$$\text{Si}\left|(c-a)\,\text{tg}\,\frac{x}{2}+b\right| < \sqrt{a^2+b^2-c^2}$$

entonces

$$I = \frac{c-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}-(c-a)\,\text{tg}\,\dfrac{x}{2}-b}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}+(c-a)\,\text{tg}\,\dfrac{x}{2}+b} + C$$

Segundo caso. El denominador tiene raíces imaginarias, es decir, $a^2+b^2<c^2$. Hay que descomponer el denominador en cuadrados para reducirlo a la forma $\displaystyle\int \frac{dz}{z^2+m^2}$.

$$(c-a)z^2+2bz+c+a = (c-a)\left(z^2+2\frac{b}{c-a}z+\frac{c+a}{c-a}\right) =$$

$$= (c-a)\left[\left(z+\frac{b}{c-a}\right)^2+\frac{c^2-a^2-b^2}{(c-a)^2}\right]$$

Entonces

$$I = \frac{2}{c-a}\int \frac{dz}{\left(z+\dfrac{b}{c-a}\right)^2+\dfrac{c^2-a^2-b^2}{(c-a)^2}} = \frac{2}{c-a}\,\frac{c-a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\,\text{arc tg}\,\frac{z+\dfrac{b}{c-a}}{\dfrac{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{c-a}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\,\text{arc tg}\,\frac{(c-a)z+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} + C$$

Remplazando z en función de x, $I = \dfrac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\,\text{arc tg}\,\dfrac{(c-a)\,\text{tg}\,\dfrac{x}{2}+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} + C.$

Integrales de la forma $I = \int R\,(\cos^2 x, \text{sen}\,x)\cos x\,dx$ y $J = \int R\,(\text{sen}^2 x, \cos x)\,\text{sen}\,x\,dx$. Se hace $\text{sen}\,x = z$ para I y $\cos x = t$ para J, y se obtienen fracciones racionales en z.

Problema 9-7 Calcule $I = \displaystyle\int \frac{\text{tg}\,x\,dx}{1+\cos x}$.

Solución. Sea $\cos x = z \Rightarrow -\text{sen}\,x\,dx = dz$. Entonces $I = -\displaystyle\int \frac{dz}{z(z+1)}$.

Ahora $\dfrac{1}{z(z+1)} = \dfrac{A}{z}+\dfrac{B}{z+1} \Rightarrow 1 = A(1+z)+Bz.$

Haciendo $\begin{cases} z=0 \Rightarrow A=1 \\ z=-1 \Rightarrow B=-1 \end{cases} \quad \therefore \quad \dfrac{1}{z(z+1)} = \dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{1+z}.$

De donde $I = -\displaystyle\int \frac{dz}{z}+\int \frac{dz}{z+1} = -\ln z+\ln(1+z)+C = \ln\frac{1+z}{z}+C = \ln\frac{1+\cos x}{\cos}+C.$

Esto supone que $\dfrac{1 + \cos x}{\cos x} > 0$, es decir, $\cos x > 0$.

Si $\cos x < 0$, $I = \ln \dfrac{1 + \cos x}{-\cos x} + C$.

Nota. Halle esta integral haciendo $\text{tg } \frac{x}{2} = z$.

Integrales de la forma $I = \int \text{sen}^m x\, dx$, $J = \int \cos^m x\, dx$. Si m es un entero positivo, se expresan las potencias en funciones lineales del seno y coseno de ángulos múltiples. Si m es un entero par, se hace $\text{tg } x = z$; si m es impar se hace para I, $\cos x = z$ y para J, $\text{sen } x = z$, lo cual las reduce a una fracción racional en z. Si $I = \int \text{tg}^m x\, dx$, se hace $\text{tg } x = z$; si m es par se puede hacer $\cos x = z$ o $\text{sen } x = z$, según que m sea positivo o negativo.

Problema 9-8 Calcule $I = \int \cos^6 x\, dx$.

Solución. Cuando se va a integrar una potencia par del seno o coseno se debe expresar la potencia en función lineal del seno y coseno de arcos múltiplos. Para ello hagamos

$$\left.\begin{array}{l} \cos x + i \text{ sen } x = u \\ \cos x - i \text{ sen } x = v \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}(u + v)$$

Por consiguiente,

$$\cos^6 x = \frac{1}{2^6}(u^6 + 6u^5v + 15u^4v^2 + 20u^3v^3 + 15u^2v^4 + 6uv^5 + v^6) =$$
$$= \frac{1}{2^6}[u^6 + v^6 + 6uv(u^5 + v^5) + 15u^2v^2(u^2 + v^2) + 20u^3v^3]$$

Teniendo en cuenta que $2 \cos px = u^p + v^p$ y $1 = uv$, entonces

$$\cos^6 x = \frac{1}{2^6}(2 \cos 6x + 12 \cos 4x + 30 \cos 2x + 20) = \frac{1}{32} \cos 6x + \frac{3}{16} \cos 4x + \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{5}{16}$$

De donde

$$I = \frac{1}{32}\int \cos 6x\, dx + \frac{3}{16}\int \cos 4x\, dx + \frac{15}{32}\int \cos 2x\, dx + \frac{5}{16}\int dx =$$
$$= \frac{1}{192} \text{ sen } 6x + \frac{3}{64} \text{ sen } 4x + \frac{15}{64} \text{ sen } 2x + \frac{5}{16} x + C$$

Problema 9-9 Calcule $I = \int (x^2 - 1) \text{ arc sen } 2x\, dx$.

Solución. Integrando por partes, tenemos que

$$\text{arc sen } 2x = u \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}, \quad x^2 - 1 = v', \quad v = \frac{x^3}{3} - x$$

Entonces $I = \dfrac{x}{3}(x^2 - 3) \text{ arc sen } 2x - \dfrac{2}{3}\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx$.

Para calcular esta última integral hagamos $2x = \text{sen } \theta \Rightarrow 2\, dx = \cos \theta\, d\theta$.

Por tanto, $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx = \int \frac{\frac{1}{8} \text{sen}^3 \theta - \frac{3}{2} \text{sen } \theta}{\cos \theta} \cos \theta\, d\theta = \frac{1}{8}\int \text{sen}^3 \theta\, d\theta - \frac{3}{2}\int \text{sen } \theta\, d\theta$.

Para calcular $\int \text{sen}^3 \theta\, d\theta$, que es la forma $\int \text{sen}^m \theta\, d\theta$, con m impar, se hace $\cos \theta = z \Rightarrow -\text{sen } \theta\, d\theta = dz$. Entonces

$$\int \text{sen}^3 \theta\, d\theta = -\int (1 - z^2)dz = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta + C$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^3 - 3x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right) + \frac{3}{3}\cos\theta + C = \frac{1}{24}\cos\theta(\cos^2\theta + 33) + C$$

y remplazando θ en términos de x,

$$\int \frac{x^3 - 3x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx = \frac{1}{24}\sqrt{1 - 4x^2}\,(34 - 4x^2) + C$$

Finalmente,

$$I = \frac{x}{3}(x^2 - 3)\,\text{arc sen } 2x - \frac{1}{18}(17 - 2x^2)\sqrt{1 - 4x^2} + C$$

Problema 9-10 Halle $I = \int \text{tg}^5 x\,dx$.

Solución. Haciendo $\cos x = z \Rightarrow -\text{sen } x\,dx = dz$. Entonces

$$I = \int \frac{\text{sen}^4 x\,dx}{\cos^5 x} = -\int \frac{(1 - z^2)^2\,dz}{z^5} = \int\left(\frac{1}{z^5} - \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z}\right)dz = \frac{1}{4z^4} - \frac{1}{z^2} + \ln z + C =$$

$$= \frac{1}{4\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + \ln\cos x + C$$

Integrales de la forma $I = \int R(x, \text{sen } mx, \cos mx, \text{sen } nx, \cos nx, \ldots)\,dx$. Se expresan las potencias y los productos del seno y coseno en función lineal del seno y del coseno de arcos múltiplos, lo cual nos conduce a integrales del tipo $\int x^m \cos bx\,dx$ y $\int x^m \text{sen } bx\,dx$, que se integran por partes haciendo $x^m = u$ y $\cos bx = v'$ o $\text{sen } bx = v'$.

Problema 9-11 Halle $I = \int \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } x} e^x\,dx$.

Solución. Como $\frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } x} = \frac{3\,\text{sen } x - 4\,\text{sen}^3 x}{\text{sen } x} = 3 - 4\,\text{sen}^2 x = 3 - 4\frac{1 - \cos 2x}{2} = 1 + 2\cos 2x$.

Entonces

$$I = \int(1 + 2\cos 2x)e^x\,dx = \int e^x\,dx + 2\int \cos 2x\,e^x\,dx = e^x + 2\int \cos 2x\,e^x\,dx$$

Para calcular la segunda integral hacemos

$$e^x = u \Rightarrow u' = e^x;\ \cos 2x = v' \Rightarrow v = \frac{1}{2}\text{sen } 2x$$

Entonces

$$\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x\,\text{sen } 2x - \frac{1}{2}\int e^x\,\text{sen } 2x\,dx \tag{1}$$

Para calcular esta última integral hacemos

$$e^x = u \Rightarrow u' = e^x;\ \text{sen } 2x = v' \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

Por consiguiente,

$$\int e^x\,\text{sen } 2x\,dx = -\frac{1}{2}e^x\cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\,dx \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos

$$\int e^x\cos 2x\,dx = 5e^x(2\,\text{sen } 2x + \cos 2x) + C$$

Finalmente,

$$I = e^x(10\,\text{sen } 2x + 5\cos 2x + 1) + C$$

Problema 9-12 Calcule $I = \int x \cos^2 x\, dx$.

Solución. Sea $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Entonces $I = \frac{1}{2}\int x\, dx + \frac{1}{2}\int x \cos 2x\, dx$. Calculando la segunda integral por partes, haciendo $x = u \Rightarrow u' = 1$ y $\cos 2x = v' \Rightarrow v = \frac{1}{2}$ sen $2x$, entonces

$$\int x \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} \text{ sen } 2x - \frac{1}{2}\int \text{sen } 2x\, dx = \frac{x}{2} \text{ sen } 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Finalmente,

$$I = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \text{ sen } 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

Integración de radicales

a) Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$.

1. Si $a > 0$, el cambio $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ racionaliza el integrando.
2. Si $c > 0$, el cambio $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$ racionaliza el integrando.
3. Si $a < 0$, $c < 0$, el cambio $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$, siendo α una de las raíces de $ax^2 + bx + c$, racionaliza el integrando.

Las funciones racionales a que conducen estos cambios son de cierta complicación, por lo que se prefiere el método de reducción directa.

Al hacer $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, el integrando se puede descomponer en elementos simples, y que da lugar a términos de la forma $\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $\int \frac{dx}{(x - \lambda)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, siendo λ una raiz de multiplicidad m.

La última integral se calcula haciendo $x - \lambda = z$, que la transforma en $\int \frac{dz}{z^m \sqrt{Az^2 + Bz + c}}$.

Para calcular $\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, m positivo o negativo, se pone en evidencia la derivada del denominador, lo cual la transforma en $\int \frac{(2ax + b)x^{m-1}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ que se integra por partes haciendo $x^{m-1} = u$ y $\frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = v'$.

Finalmente, el problema se reduce al cálculo de integrales de la forma $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ y $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Para calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ se descompone $ax^2 + bx + c$ en cuadrados, que la transforma en $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + k}}$ si $a > 0$ y en $\int \frac{dz}{\sqrt{m^2 - z^2}}$ si $a < 0$.

Para calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ se hace $x = \frac{1}{z}$, que la transforma en $\int \frac{dx}{\sqrt{Az^2 + Bz + c}}$.

b) Si $I = \int R(x, \sqrt{ax + b})\, dx$, se hace $ax + b = z^2$, que da lugar a una fracción racional en z.

$I = \int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})\, dx$; se hace $ax + b = z^2$, lo cual da lugar a una fracción racional en z y $\sqrt{Az^2 + Bz + c}$.

c) Integrales del tipo $\int (R, x^{a/b}, x^{c/d}, \ldots, x^{r/s})\, dx$.

Haciendo $x = t^u$ con $u =$ m.c.m. $(b, d, \ldots, s)$.

d) Integrales del tipo $I = \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma/\delta}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu/\nu}\right] dx$

Haciendo $\frac{ax+b}{cx+d} = t^u$, $u = \text{m.c.m.}\,(\beta, \gamma, \ldots, \nu)$, la transforma en una fracción racional en t.

e) Integrales del tipo $I = \int x^m(a + bx^n)^p\,dx$, llamadas binomias, solo en los siguientes casos es posible racionalizar el integrando; en los demás conducen a funciones trascendentes.

Caso 1. p entero $\begin{cases} p > 0, \text{ se desarrolla } (a+bx^n)^p \text{ por Newton.} \\ p < 0, \text{ se desarrolla } (a+bx^n)^{-p} \text{ por Newton en el denominador y se redu-} \end{cases}$
ce a una del tipo *d*.

Caso 2. $\frac{m+1}{n}$ entero; cambiando $(a + bx^n) = t^u$ (u = denominador de p).

Caso 3. $\frac{m+1}{n} + p$ entero; debe dividirse $(a + bx^n)^p$ por x^{np} y multiplicar x^m por x^{np}, y se reduce entonces al caso 2.

Problema 9-13 Calcule la integral $I = \int \frac{x+2}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Solución. Descomponiendo $\frac{x+2}{x-1}$ se obtiene $\frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$. Entonces

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + 3\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + 3\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Para calcular la segunda integral hagamos $x - 1 = \frac{1}{z} \Rightarrow dx = -\frac{dz}{t^2}$, lo cual da

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{2t^2+2t+1}}$$

Descomponiendo en cuadrados, $2z^2 + 2z + 1 = 2\left(z^2 + z + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$. Por tanto,

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(z + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2z^2+2z+1}\right) + C$$

Remplazando z en función de x,

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 1}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{x-1}\left(\frac{x+1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

Finalmente, $I = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{x-1}\left(\frac{x+1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\right) + C.$

Problema 9-14 Calcule $I = \displaystyle\int \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{1 - x\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$

Solución. Sea $x = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$. Entonces $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta} \cos\theta\, d\theta.$

Haciendo $\operatorname{tg}\theta = z \Rightarrow d\theta = \dfrac{dz}{1 + z^2}$ se obtiene $I = \displaystyle\int \frac{z + 1}{(z^2 - z + 1)(z^2 + 1)}\, dz$, que es la integral de una fracción racional cuyo denominador tiene raíces imaginarias simples.

$$\frac{z + 1}{(z^2 - z + 1)(z^2 + 1)} = \frac{az + b}{z^2 - z + 1} + \frac{cz + d}{z^2 + 1} \Rightarrow z + 1 \equiv (az + b)(z^2 + 1) + (cz + d)(z^2 - z + 1)$$

Identificando coeficientes se obtiene

$$\begin{cases} 0 = a + c \\ 0 = b + d - c \\ 1 = a + c - d \\ 1 = b + d \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{array} \quad \therefore \quad \frac{z + 1}{(z^2 - z + 1)(z^2 + 1)} = \frac{-z + 2}{z^2 - z + 1} + \frac{z - 1}{z^2 + 1}$$

Entonces $I = -\displaystyle\int \frac{z - 2}{z^2 - z + 1}\, dz + \int \frac{z - 1}{z^2 + 1}\, dz$. Para calcular $\displaystyle\int \frac{z - 2}{z^2 - z + 1}\, dz$ se hace aparecer en el numerador la derivada del denominador haciendo $z - 2 = \frac{1}{2}(2z - 1) - \frac{3}{2}$. De donde

$$\int \frac{z - 2}{z^2 - z + 1}\, dz = \frac{1}{2}\int \frac{2z - 1}{z^2 - z + 1}\, dz - \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2 - z + 1} = \frac{1}{2}\ln(z^2 - z + 1) + \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2 - z + 1}$$

Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dz}{z^2 - z + 1}$ se descompone en cuadrados a $z^2 - z + 1$.

$$z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dz}{z^2 - z + 1} = \int \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{z - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2z - 1}{\sqrt{3}} + C$$

Entonces $\displaystyle\int \frac{z - 2}{z^2 - 2 + 1}\, dz = \frac{1}{2}\ln(z^2 - z + 1) - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z - 1}{\sqrt{3}} + C.$

Para calcular $\displaystyle\int \frac{z - 1}{z^2 + 1}\, dz$ se descompone en elementos simples y

$$\int \frac{z - 1}{z^2 + 1}\, dz = \frac{1}{2}\int \frac{2z}{z^2 + 1}\, dz - \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2}\ln(z^2 + 1) - \operatorname{arc\,tg} z + C$$

De donde $I = -\dfrac{1}{2}\ln(z^2 - z + 1) + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2z - 1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}\ln(z^2 + 1) - \operatorname{arc\,tg} z + C =$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{z^2 + 1}{z^2 - z + 1} + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z - 1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arc\,tg} z + C$$

Remplazando z en función de x, $z = \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}} = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, lo cual da, finalmente,

$$I = -\frac{1}{2}\ln(1 - x\sqrt{1 - x^2}) + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{3(1 - x^2)}} - \operatorname{arc\,sen} x + C$$

Problema 9-15 Calcule $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(x-a)}}$.

Solución. Para reducir la integral a la forma $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+k}}$ hay que descomponer a $x(x-a)$ en cuadrados.

$$x(x-a) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

Por consiguiente,

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}}} = \ln\left(x - \frac{a}{2} + \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}}\right) + C = \ln\left(x - \frac{a}{2} + \sqrt{x(x-a)} + C\right)$$

Problema 9-16 Calcule $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4+3x-9x^2}}$.

Solución. Como $a < 0$ hay que reducirla a la forma $\int \frac{dx}{\sqrt{m^2-z^2}}$, para lo cual hay que descomponer a $4 + 3x - 9x^2$ en cuadrados.

$$4 + 3x - 9x^2 = -9\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right) = -9\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} - \frac{4}{9}\right] =$$

$$= -9\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{36}\right] = 9\left[\frac{17}{36} - \left(x-\frac{1}{6}\right)^2\right]$$

Por consiguiente,

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left[\frac{17}{36} - \left(x-\frac{1}{6}\right)^2\right]}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{17}{36} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}\frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{17}}{6}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}\frac{3x-1}{\sqrt{17}} + C$$

Problema 9-17 Calcule $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}}$.

Solución. Esta integral es de la forma $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx-c}}$, $a > 0$; es necesario reducirla a la forma $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+k}}$, para lo cual hay que descomponerla en cuadrados.

$$x^2 + 2x\cos\alpha + 1 = (x + \cos\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha$$

Entonces

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\cos\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha}} = \ln\left(x + \cos\alpha + \sqrt{(x+\cos\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha} + C\right) =$$

$$= \ln\left(x + \cos\alpha + \sqrt{x^2 + 2x\cos\alpha + 1} + C\right)$$

Problema 9-18 Calcule $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Solución. Como es de la forma $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$, se hace $x = \frac{1}{z} \Rightarrow dx = -\frac{dz}{z^2}$. Entonces

$$I = -\int \frac{\sqrt{z^2}\,dz}{z\sqrt{z^2+1}}$$

Si $x > 0$, $z > 0$ y $\sqrt{z^2} = z$; por consiguiente,

$$I = -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = -\ln(z + \sqrt{z^2+1}) + C$$

Remplazando z en función de x

$$I = -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) + C = \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C$$

Si $x < 0$, $z < 0$ y $\sqrt{z^2} = -z$. Entonces

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) + C$$

Remplazando z en función de x

$$I = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) + C = \ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{-k} + C$$

Problema 9-19 Calcule $I = \int \sqrt{4+3x-9x^2}\,dx$.

Solución. Esta integral es de la forma $\int\sqrt{ax^2+bx+c}$ con $a < 0$. El mejor método para resolverla consiste en reducirla a una integral trigonométrica, para lo cual hay que descomponer $4 + 3x - 9x^2$ e n cuadrados.

$$-9x^2 + 3x + 4 = 9\left[\frac{17}{36} - \left(x - \frac{1}{6}\right)^2\right]$$

Entonces
$$I = \int\sqrt{9\left[\frac{17}{36} - \left(x-\frac{1}{6}\right)^2\right]}\,dx = 3\int\sqrt{\frac{17}{36} - \left(x-\frac{1}{6}\right)^2}\,dx$$

Hagamos $x - \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{17}}{6}\text{sen }\theta \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{17}}{6}\cos\theta\,d\theta$. Lo cual da

$$I = 3\int\sqrt{\frac{17}{36} - \frac{17}{36}\text{sen}^2\theta}\cdot\frac{\sqrt{17}}{6}\cos\theta\,d\theta = 3\cdot\frac{17}{36}\int\cos^2\theta\,d\theta = \frac{17}{12}\cdot\frac{1}{2}(\theta + \cos\theta\,\text{sen }\theta) + C$$

Como $\text{sen }\theta = \frac{6x-1}{\sqrt{17}}$, $\theta = \text{arc sen}\frac{6x-1}{\sqrt{17}}$ y $\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{(6x-1)^2}{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}}\;\sqrt{4+3x-9x^2}$

Finalmente, remplazando θ en función de x, obtenemos:

$$I = \frac{6x-1}{12}\sqrt{4+3x-9x^2} + \frac{17}{24}\text{arc sen}\frac{6x-1}{\sqrt{17}} + C$$

Problema 9-20 Calcule la integral $I = \int x^4\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Solución. El método más simple consiste en reducirla a una integral trigonométrica, haciendo

$$x = \text{sen }\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\,d\theta$$

Entonces $I = \int \text{sen}^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\frac{1}{4}\text{sen}^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int\text{sen}^2\theta\,d\theta - \frac{1}{8}\int\text{sen}^2 2\theta\cos 2\theta\,d\theta$.

Como $\int\text{sen}^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}(2\theta - \text{sen }2\theta\cos 2\theta) + C$ y para calcular la segunda integral se hace $\text{sen }2\theta = z \Rightarrow 2\cos 2\theta\,d\theta = dz$.

Entonces $\int\text{sen}^2 2\theta\cos 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int z^2\,dz = \frac{z^3}{6} + C = \frac{1}{6}\text{sen}^3 2\theta + C$; por tanto,

$$I = \frac{1}{16}(2\theta - \text{sen }2\theta\cos 2\theta) - \frac{1}{48}\text{sen}^3 2\theta + C$$

Remplazando θ en función de x

$$I = \frac{1}{16}\left[2 \text{ arc sen } x - 2x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)\right] - \frac{1}{48}\cdot 8x^3(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + C = \frac{1}{8}\text{ arc sen } x + $$
$$+ \frac{x}{24}(4x^4 + 2x^3 - 3)\sqrt{1-x^2} + C$$

Nota. Si se escribe $\int \frac{x^4(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, hay que calcular dos integrales de la forma $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+C}}$.

Problema 9-21 Determine $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}$.

Solución. Se puede descomponer la integral en dos más simples, multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b}$.

$$\frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}} = \frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}{(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b})} = \frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}{x-a-(x-b)} =$$
$$= \frac{1}{b-a}(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b})$$

Entonces $I = \frac{1}{b-a}\left(\int\sqrt{x-a}\,dx - \int\sqrt{x-b}\right)dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{2}{3}(x-a)^{3/2} - \frac{2}{3}(x-b)^{3/2}\right] + C =$
$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{b-a}\left[(x-a)\sqrt{x-a} - (x-b)\sqrt{x-b}\right] + C$$

Nota. Esta descomposición es posible únicamente en casos particulares. De lo contrario, hay que aplicar el método general relativo a las integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$, haciendo, por ejemplo, $x - a = u^2$.

Este método reduce la integral a la forma $\int \frac{u\,du}{u+\sqrt{u^2+a-b}}$, que se debe integrar descomponiendo a $\frac{u}{u+\sqrt{u^2+a-b}}$ en suma de elementos de la forma $\frac{u^m}{\sqrt{u^2+a-b}}$.

Problema 9-22 Calcule $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Solución. El método consiste en hacer desaparecer los radicales por medio de un cambio de variable. Sea $x = z^6 \Rightarrow dx = 6z^5\,dz$.

Entonces $I = 6\int \frac{z^5\,dz}{z^3+z^2} = 6\int \frac{z^3\,dz}{z+1}$, que es la integral de una fracción racional. Como $z^3 = (z+1)(z^2-z+1) - 1$. Entonces

$$I = 6\int(z^2 - z + 1)\,dz - 6\int\frac{dz}{z+1} + C = 6\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z\right) - 6\ln(z+1) + C$$

Remplazando z en función de x, entonces

$$I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C$$

Problema 9-23 Calcule $I = \int x^3(a+bx^3)^{1/4}\,dx$.

Solución. Como es una integral binomial hacemos $bx^3 = az \Rightarrow$

$$x = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/3} z^{1/3} \text{ y } dx = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3} z^{-2/3}\,dz$$

Entonces $I = \frac{1}{3} a^{1/4} \frac{a^3}{b^3} \int z^2(1+z)^{1/4}\, dz$, que es una integral de la forma $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \ldots\right] dx$.

Sustituyendo $1 + z = u^4 \Rightarrow dz = 4u^3\, du$. Por consiguiente,

$$I = \frac{4}{3} a^{1/4} \frac{a^3}{b^3} \int (u^4 - 1)^2 u^4\, du = \frac{4}{3} a^{1/4} \frac{a^3}{b^3} \int (u^{12} - 2u^8 + u^4)\, du =$$

$$= \frac{4}{3} a^{1/4} \frac{a^3}{b^3} \left(\frac{u^{13}}{13} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^5}{5}\right) + C$$

Remplazando u en función de x y recordando que $u = (1+z)^{1/4} = a^{-1/4}(a + bx^3)^{1/4}$, finalmente tenemos que

$$I = \frac{4}{b^3}(a + bx^3)^{5/4}\left[\frac{1}{13}(a+bx^3)^2 - \frac{2}{9}a(a+bx^3) + \frac{1}{5}a^2\right] + C$$

Problema 9-24 Calcule $I = \int x^2(a + bx^5)^{-18/5} + C$.

Solución. Como se va a integrar un diferencial binomial, se hace $bx^5 = ax \Rightarrow x = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/5} z^{1/5} \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{5}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/5} z^{-4/5}\, dz$.

Entonces $I = \frac{1}{5} a^{-18/5}\left(\frac{a}{b}\right)^{3/5} \int z^{-2/5}(1+z)^{-18/5}\, dz = \frac{1}{5} a^{-18/5}\left(\frac{a}{b}\right)^{3/5} \int z^{-4}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-18/5} dz$,

que es de la forma $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \ldots\right] dx$.

Sea $\frac{1+z}{z} = u^5 \Rightarrow z = \frac{1}{u^5 - 1}$ y $dz = \frac{5u^4}{(u^5-1)^2}\, du$.

Por tanto, $I = -a^{-18/5}\left(\frac{a}{b}\right)^{3/5} \int (u^5 - 1) u^{-14}\, du = -a^{-18/5}\left(\frac{a}{b}\right)^{3/5} \int \left(\frac{1}{u^4} - \frac{2}{u^9} + \frac{1}{u^{14}}\right) du =$

$= -a^{-18/5}\left(\frac{a}{b}\right)^{3/5}\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{u^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{u^8} - \frac{1}{13}\frac{1}{u^{13}}\right) + C.$

Remplazando u en función de x y recordando que $u = \left(\frac{1+z}{z}\right)^{1/5} = b^{-1/5}(a + bx^5)^{1/5}$, entonces

$$I = \frac{1}{a^3}(a + bx^5)^{-13/5}\left[\frac{1}{3}(a+bx^5)^2 - \frac{1}{4}b(a+bx^5) + \frac{1}{13}b^2\right] + C$$

Integración de exponenciales

1. Si $I = \int R(e^{mx})\, dx$, se hace $e^{mx} = z$, la cual transforma el integrando en una fracción racional en z.

2. Si $I = \int p(x, e^{ax}, \text{sen } mx, \cos mx, \text{sen } x, \cos nx, \ldots)\, dx$, se expresan las potencias y los productos del seno y coseno en función lineal del seno y del coseno de los arcos múltiples, que la reducen a $\int x^m e^{ax} \cos bx\, dx$ y $\int x^m e^{ax} \text{sen } bx\, dx$.

Para calcular $\int x^m e^{ax}\, dx$ se integra por partes, haciendo $x^m = u$ y $e^{ax} = v'$.

Para calcular $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ o $\int e^{ax} \text{sen } bx\, dx$, se integra por partes.

Problema 9-25 Halle $I = \int (ax + b)^{3/2}$, $a > 0$.

Solución. Es una integral binomia con $m = 0$, $n = 2$, $p = 3/2$.

Clasificación: $p = \frac{3}{2} \neq$ entero, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2} \neq$ entero, $\frac{m+1}{n} \neq p = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$, entonces se trata de una integral binomia en el tercer caso.

$$I = \int (ax^2 + b)^{3/2}\, dx = \int x^3 (a + bx^{-2})^{3/2}, \text{ que está en el segundo caso}$$

Haciendo $a + bx^{-2} = z^2$; $2z\,dz = -2bx^{-3}\,dx$. Sustituyendo, resulta $I = -b^2 \int \frac{z^4\,dz}{(z^2 - a)^3}$.

Si $a > 0$, el denominador tiene las raíces $z = \pm\sqrt{a}$, triples:

$$I = -b_2 I_1,\ I_1 = \frac{Az^3 + Bz^2 + Cz + D}{(z^2 - a)^2} + \int \frac{E\,dz}{(z + \sqrt{a})} + \int \frac{F\,dz}{(z - \sqrt{a})}$$

Derivando e identificando, resulta que

$$E = 0,\ B = 0,\ D = 0,\ A = -\frac{5}{8},\ F = \frac{3}{8},\ G = \frac{3a}{8}$$

Entonces $I = -\frac{b^2}{8} \cdot \frac{-5z^3 + 3az}{(z^2 - a)^2} - \frac{3}{16}\frac{b^2}{\sqrt{a}} \ln \frac{z - \sqrt{a}}{z + \sqrt{a}}$ con $z = \frac{\sqrt{ax^2 + b}}{x}$

Nota. Resuelva el ejercicio con el cambio de variable $x = \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{senh} \theta$.

Problema 9-26 Determine $I = \int \frac{x\,dx}{(1 + x^3)^{3/2}}$.

Solución. Integral binomial en su tercer caso, $m = 1$, $n = 3$, $p = -\frac{2}{3}$ y $\frac{m+1}{n} + p = 0$.

$\therefore\ I = \int x(1 + x^3)^{-2/3} = \int x^{-1}(x^{-3} + 1)^{-2/3}\,dx$, con lo cual se reduce al segundo caso.

Haciendo $1 + x^{-3} = z^{-3} \Rightarrow -3x^{-4}\,dx = -3z^{-4}\,dz$. Sustituyendo,

$$I = \int \frac{z\,dz}{1 - z^3} = -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z - 1} + \frac{1}{3}\int \frac{z - 1}{z^2 + z + 1}\,dz = -\frac{1}{3}\ln(z - 1) + \frac{1}{6}\int \frac{(2z + 1) - 3}{z^2 + z + 1} =$$

$$= -\ln\sqrt[3]{z - 1} + \ln\sqrt[6]{z^2 + z + 1} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2 + z + 1}$$

Por tanto, $I = -\ln\frac{(z - 1)^{1/3}}{(z^2 + z + 1)^{1/6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z + 1}{\sqrt{3}}\right)$, donde $z = \frac{x}{\sqrt{1 + x^3}}$.

Problema 9-27 Determine $I = \int x^2(1 - x^2)^{3/2}\,dx$.

Solución. Integral binomial en su tercer caso, $m = 2$, $n = 2$, $p = \frac{3}{2}$, $\frac{m+1}{n} + p = 3$. Multiplicando y dividiendo el integrando por $x^{np} = x^3$.

$$I = \int x^5\left(\frac{1 - x^2}{x^2}\right)^{3/2} dx = \int x^5(x^{-2} - 1)^{3/2}\,dx, \text{ que está en el segundo caso}$$

Haciendo $x^{-2} - 1 = z^2 \Rightarrow -\frac{2}{x^3}\,dx = 2z\,dz$. $dx = -zx^3\,dz$. Sustituyendo,

$$I = -\int x^8 z\,dz = -\int \frac{z^4}{(z^2 + 1)^4}\,dz$$

Sustituyendo $z = \operatorname{tg}\theta$, $dz = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$, entonces

$$I = -\int \frac{\operatorname{tg}^4\theta\,d\theta}{(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^4\cos^2\theta} = -\int \frac{\operatorname{sen}^4\theta\,d\theta}{\cos^4\theta}\cos^8\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\int \operatorname{sen}^4\theta\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= \int \underbrace{-\cos\theta}_{u}\ \underbrace{\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta\,d\theta}_{v'} = -\frac{1}{5}\cos\theta\operatorname{sen}^5\theta - \frac{1}{5}\int \operatorname{sen}^6\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\cos\theta\operatorname{sen}^5\theta + \int \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}\right] = -\frac{1}{5}\left[\cos\theta\operatorname{sen}^5\theta + \frac{1}{32}\int(-\cos 6\theta + 6\cos 4\theta - 15\cos 2\theta + 10)\right] =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos\theta\operatorname{sen}^5\theta + \frac{1}{5\cdot 32}\left(\frac{1}{6}\operatorname{sen}6\theta - \frac{6}{4}\operatorname{sen}4\theta + \frac{15}{2}\operatorname{sen}2\theta + 10\theta\right) \text{ con } \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Nota. Resuelva esta integral haciendo $x = \cos z$.

Problema 9-28 Halle $I = \int x^{-4}(1 + x^2)^{-1/2}\,dx$.

Solución. Binomia en el tercer caso, $m = -4$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} + p = -2$.

Multiplicando y dividiendo por $x^{np} = (x^{-2})^{-1/2} = x$,

$$I = \int x^{-5}(x^{-2} + 1)^{-1/2}\,dx, \text{ reducida al segundo caso}$$

Haciendo $\frac{1}{x^2} + 1 = z^{-2} \Rightarrow -2x^{-3}\,dx = -2z^{-3}\,dz$. Sustituyendo,

$$I = \int z^{-3}z(z^2 - 1)\,dz = \int z^{-2}\left(\frac{1 - z^2}{z^2}\right)dz = \int \frac{dz}{z^4} - \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{3}z^{-3} + z^{-1} = \frac{\sqrt{1 + x^2}(2x^2 - 1)}{3x^3}$$

$e^{ax} = u$ y $\cos bx = v'$ o $\operatorname{sen} bx = v'$.

Para calcular $\int x^m e^{ax} \cos bx\,dx$ o $\int x^m e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$ se expresa

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \quad \operatorname{sen} bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2}$$

la cual la transforma en $\int x^m e^{Ax}\,dx$. A imaginario.

Problema 9-29 Calcule $I = \int x^2 e^{-x} \cos 3x\,dx$.

Solución. Como $\cos 3x = \frac{1}{2}(e^{i3x} + e^{-3ix})$, entonces $I = \frac{1}{2}\int x^2 e^{(-1+3i)x}\,dx + \frac{1}{2}\int x^2 e^{(-1-3i)x}\,dx$.

Integrando por partes con $x^2 = u$, $e^{Ax} = v'$, $u' = 2x$, $v = \frac{1}{A}e^{Ax}$. Entonces

$$I = \int x^2 e^{Ax}\,dx = \frac{1}{x}x^2 e^{Ax} - \frac{2}{A}\int x e^{Ax}\,dx$$

De nuevo integrando por partes, la última integral se obtiene

$x = u$, $e^{Ax} = v'$, $u' = 1$, $v = \frac{1}{A}e^{Ax}$; entonces $\int x e^{Ax}\,dx = \frac{1}{A}xe^{Ax} - \frac{1}{A}\int e^{Ax}\,dx = \frac{1}{A}xe^{Ax} - \frac{1}{A^2}e^{Ax} + C$

De donde $\int x^2 e^{Ax}\,dx = \frac{1}{A}x^2 e^{Ax} - \frac{2}{A^2}xe^{Ax} + \frac{2}{A^3}e^{Ax} + C$. Por consiguiente,

$$I = e^{-x}\left\{\frac{x^2}{8}[(-1 - 3i)e^{3ix} + (-1 + 3i)e^{-3ix}] - \frac{x}{16}[(-1 - 3i)^2 e^{3ix} + (-1 + 3i)^2 e^{-3ix}] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{64}[(-1 - 3i)^3 e^{3ix} + (-1 + 3i)^3 e^{-3ix}]\right\} + C$$

Por otra parte, $(-1 - 3i)^2 = -8 + 6i$; $(-1 + 3i)^2 = -8 - 6i$.
$(-1 - 3i)^3 = 26 + 18i$; $(-1 + 3i)^3 = 26 - 18i$.

Entonces $I = e^{-x}\left[\frac{x^2}{8}[-(e^{3ix} + e^{-3ix}) - 3i(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 18i(e^{3ix} - e^{-3ix})]\right] + C$.

Además, como $i = -\frac{1}{i}$ y $\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2i}(e^{3ix} - e^{-3ix})$,

$$I = e^{-x}\left[\frac{x^2}{4}\left(-\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right) - \frac{1}{4}x\left(-4\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} - 3\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{16}\left(13\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} - 9\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right)\right] + C = \frac{1}{4}e^{-x}\left[x^2(3 \operatorname{sen} 3x - \cos 3x) + x(3 \operatorname{sen} 3x + \right.$$
$$\left. + 4\cos 3x) - \frac{1}{4}(9 \operatorname{sen} 3x - 13 \cos 3x)\right] + C$$

Fórmulas de recurrencia

Problema 9-30 Halle una fórmula de recurrencia para $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución. Sea $I_m = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^{m-1}(-x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Integrando por partes, con

$$x^{m-1} = u,\; du = (m-1)x^{m-2}\,dx,\; dv = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\; v = \sqrt{1-x^2}$$

Entonces $I_m = [x^{m-1}\sqrt{1-x^2} - (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{1-x^2}\,dx] = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} +$

$$+ (m-1)\int \frac{x^{m-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow I_m[1+m-1] = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\,I_{m-2}$$

es decir,

$$mI_m = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\,I_{m-2}$$

Problema 9-31 Halle una fórmula de recurrencia para $I_m = \int \frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}$.

Solución. $I_m = \int \frac{x\,dx}{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}}$. Integrando por partes, con

$$u = \frac{1}{x^{m+1}} = x^{-(m+1)};\; du = -(m+1)x^{-(m+2)}\,dx;\; dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\; v = -\sqrt{1-x^2}$$

Entonces $I_m = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x^{m+1}} - \int (m+1)\frac{1}{x^{m+2}}\sqrt{1-x^2}\,dx \Rightarrow I_m = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^{m+1}} - (m+1)[I_{m+2} - I_m] \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_m[1-m-1] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^{m+1}} - (m+1)\,I_{m+2}$$

Despejando a I_{m+2} y llamando m a $m+2$ se obtiene

$$(m-1)\,I_m = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^{m+1}} + (m-2)\,I_{m-2}$$

Problema 9-32 Si $p(x)$ es un polinomio de grado m en x, halle una fórmula de recurrencia para $I_m = \int p(x)e^{ax}\,dx$.

Solución. Integrando por partes, con $u = p(x)$, $du = p'(x)\,dx$, $dv = e^{ax}\,dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$. Entonces

$$I_m = \frac{1}{a}p(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int p'(x)e^{ax}\,dx$$

Llamando $I_{m-1} = \int p'(x)e^{ax}\,dx \Rightarrow I_m = \frac{1}{a}p(x)e^{ax} - \frac{1}{a}I_{m-1}$

Problema 9-33 Halle una fórmula de recurrencia para $I_n = \int (2-2x^2)^{n/2}\,dx$, n impar.

Solución. Cambiando $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t\,dt$ y sustituyendo

$$I_n = \sqrt{2^n}\int \cos^n t \cos t\,dt = \sqrt{2^n}\int \cos^{n+1} t\,dt = \sqrt{2^n}\int \cos^n t \cos t\,dt$$

Integrando por partes, con $u = \cos^n t \Rightarrow du = n\cos^{n-1} t\,(-\operatorname{sen} t)\,dt$ y $dv = \cos t\,dt \Rightarrow v = \cos t$, entonces

$$I_n = \sqrt{2^n}[\cos^n t \operatorname{sen} t + n\int \cos^{n-1} t \operatorname{sen}^2 t\,dt] = \sqrt{2^n}[\cos^n t \operatorname{sen} t + n\,I_{n-1} - n\,I_{n+1}]$$

Despejando I_{n+1} y haciendo $n + 1 = n$ se tiene que

$$I_n = \frac{1}{n-1}\cos^{n-1} t \operatorname{sen} t + I_{n-2} - \frac{I_{n-1}}{(n-1)\sqrt{2^{n-1}}}$$

y sustituyendo t

$$I_n = \frac{1}{n-1}(1 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} x + I_{n-2} - \frac{I_{n-1}}{(n-1)\sqrt{2^{n-1}}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}(2x+1)\,dx}{1 + 2\operatorname{tg}^2(2x+1)}$. Sustituya $\operatorname{tg}(2x+1) = z$.

Resp.: $\frac{1}{4}\ln[1 + \operatorname{sen}^2(2x+1)]$

2. Halle $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$. Cambio $\operatorname{tg} x = z$. *Resp.:* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}[\sqrt{2}\operatorname{tg} x]$

Halle las siguientes integrales y verifique la respuesta por derivación.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + a\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C, \quad (0 < a < 1).$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right) + C, \quad ab \neq 0.$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+x}\,dx}{x} = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{x^2+x} + 2x + 1) + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2} = -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2x+1}{2}\right) + C.$

7. Muestre que $\displaystyle\int_0^x e^{-t}t^2 = e^{-x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) + C.$

$$\int_0^x e^{-t}t^3 = 3!\,e^{-x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + C.$$

Muestre que:

8. $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{(1+x^2)^3} = \frac{-\operatorname{arc\,tg} x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{6(1+x^2)^2} + C.$

9. $\displaystyle\int \ln(\sqrt{1+x^2}\,dx = x\ln\sqrt{1+x^2} - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$. Use las sustituciones $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $u = y^2$.

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = x(\operatorname{tg} x - \sec x) + \ln(\cos x) + \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C.$

12. $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{x\cos^3 x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = xe^{\operatorname{sen} x} - \sec x\,e^{\operatorname{sen} x} + C.$

13. $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{-\sqrt{2}}{4}\ln(\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1) +$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1) + C, \quad (u = \sqrt{\operatorname{tg} x}).$$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)}{\sqrt{2}} + C, (t = \operatorname{tg} x).$

Calcule las siguientes integrales:

15. $I = \int \frac{dx}{1 + (2x - 1)^2}$. *Resp.:* $\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,(2x - 1) + C$

16. $\int \frac{(2a^2 - x^2)x^3\,dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$. *Resp.:* $\frac{(a^2 - x^2)^2 + 3a^4}{3(a^2 - x^2)^{1/2}} + C$

17. $\int \frac{2x\,dx}{(1 + x^4)^3}$. *Resp.:* $\frac{1}{8}\,\frac{3x^6 + 5x^2}{(1 + x^4)^2} + \frac{3}{8}\,\text{arc tg}\,x^2 + C\ (x^2 = t)$

18. $\int \frac{2x^2 + x + 1}{(x^2 + 3)(2x^2 + x + 5)}\,dx$.

Resp.: $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 3) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{39}}\,\text{arc tg}\,\frac{4x + 1}{\sqrt{39}} - \frac{1}{2}\ln(2x^2 + x + 5) + C$

19. $\int \frac{dx}{1 + x^4}$. *Resp.:* $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{1 + \sqrt{2}x - x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2}\right) + C$

20. $\int \sqrt{\text{tg}\,x}\,dx$. *Resp.:* $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln(\operatorname{sen} x - \sqrt{\operatorname{sen} 2x} + \cos x) + \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}{\cos x - \operatorname{sen} x}\right] + C,$
$(\text{tg}\,x = y^2)$

Integrales binomias. Halle:

21. $\int x^{-4}(1 + x^2)^{-1/2}\,dx$. *Resp.:* $\frac{(2x^2 - 1)(1 + x^2)^{1/2}}{2x3} + C$

22. $\int \frac{(2x^4 + 1)^{2/3}}{x}\,dx$. *Resp.:* $\frac{3}{8}(2x^4 + 1)^{2/3} + \frac{1}{4}\ln[(2x^4 + 1)^{1/3} - 1] - \frac{1}{8}\ln[(2x^4 + 1)^{2/3} +$
$+ (2x^4 + 1)^{1/3} + 1] + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{arc tg}\,\frac{2(2x^4 + 1)^{1/3} + 1}{\sqrt{3}} + C$

23. $\int x^3(x^2 + 3)^{-1/3}\,dx$. *Resp.:* $\frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 3}\,(x^2 - 6) + C$

24. $\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$. *Resp.:* $-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc sen}\,\frac{\sqrt{3}}{x - 2} + C$

25. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$. *Resp.:* $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\left[\text{tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right] + C$

26. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$. *Resp.:* $\frac{1}{48}[2\operatorname{sen} 6x + 3\operatorname{sen} 4x + 6\operatorname{sen} 2x] + \frac{x}{4} + C$

27. $\int \frac{\cos x\,dx}{5 + 4\cos x}$. *Resp.:* $\frac{x}{4} - \frac{5}{6}\,\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}}{3}\right) + C$

28. $\int \cos^8 x\,dx$. *Resp.:* $\frac{1}{2^7}\left[\frac{\operatorname{sen} 8x}{8} + \binom{8}{1}\frac{\operatorname{sen} 6x}{6} + \binom{8}{2}\frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \binom{8}{3}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \binom{8}{4}x\right] + C$

29. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x}$. *Resp.:* $-\frac{1}{16}\,\frac{1}{\text{tg}^4\,\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{8}\,\text{tg}^2\,\frac{x}{2} + C$

30. $\int x\,\text{arc tg}\,\frac{1}{1 + x}\,dx$. *Resp.:* $\frac{x^2}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) + C$

31. $\int \frac{x \ln x\,dx}{(1 + x^2)^2}$. *Resp.:* $\frac{-\ln x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(1 + x^2) + C.$

32. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{1 + k^2\operatorname{sen}^2 x}}$. *Resp.:* $\frac{1}{k}\,\text{arc cos}\left[\frac{k\cos x}{\sqrt{1 + k^2}}\right] = -\frac{1}{k}\,\text{arc sen}\left[\frac{k\cos x}{\sqrt{1 + k^2}}\right] + C$

Pruebe que:

33. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{q}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2ax+b}{\sqrt{q}} & \text{para } q = 4ac - b^2 > 0. \\[2ex] \dfrac{-2}{2ax+b} & \text{para } q = 4ac - b^2 = 0. \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-q}} \ln \left| \dfrac{2ax+b-\sqrt{-q}}{2ax+b+\sqrt{-q}} \right| & \text{para } q = 4ac - b^2 < 0. \end{cases}$$

Verifique las siguientes fórmulas de recurrencia:

34. $\int \frac{\cos^m x\, dx}{\text{sen}^n x} = -\frac{\cos^{n+1} x\, dx}{(m-1)\, \text{sen}^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cos^n x\, dx}{\text{sen}^{m-2} x},\ m \neq 1.$

35. $\int \frac{\text{sen}^m x\, dx}{\cos^n x} = \frac{\text{sen}^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\text{sen}^m x\, dx}{\cos^{n-2} x},\ n \neq 1.$

36. $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx,\ n \neq 1.$

37. $\int \operatorname{cotg}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x\, dx,\ n \neq 1.$

38. $\int x^n \text{sen } x\, dx = -x^n \cos x + nx^{n-1} \text{sen } x - n(n-1) \int x^{n-2} \text{sen } x\, dx.$

39. $\int x^n \cos x\, dx = x^n \text{sen } x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x\, dx.$

40. $\int x^m (x+a)^n\, dx = \frac{x^m (x+a)^{n+1}}{m+n+1} - \frac{ma}{m+n+1} \int x^{m-1} (x-a)^n\, dx,\ m + n + 1 \neq 0.$

Halle:

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$. *Resp.:* $2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x+1} + C$

42. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}$. *Resp.:* $\ln \left| \frac{(\sqrt{x+1} - 1)^2}{x + 2\sqrt{x+1}} \right| + C$

43. $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$. *Resp.:* $\frac{1}{4x^4} + \frac{3}{8x^2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{3}{8} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x} + C$

44. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x\sqrt{x^2 - x + 1}}$. *Resp.:* $\frac{2x - 1}{4} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{19}{8} \ln (2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}) + C$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$. *Resp.:* $\frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{x^{-4} + 1} + 1}{\sqrt{x^{-4} + 1} - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \sqrt[4]{x^{-4} + 1} + C$

46. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}}$. *Resp.:* $\frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{3x^3} + C$

47. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^5}}$. *Resp.:* $\frac{1}{10} \ln \frac{(z - 1)^2}{z^2 + z + 1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arc\,tg} \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} + C$, con $z = \sqrt[3]{1 + x^5}$

48. $\int \frac{dx}{x^2 (2 + x^3)^{5/3}}$. *Resp.:* $-\frac{1}{8} \frac{4 + 3x^3}{x(2 + x^3)^{2/3}} + C$

49. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}$. *Resp.:* $-2\sqrt[3]{(x^{-3/4} + 1)^2} + C$

50. $\int e^{2x} \text{sen}^2 x\, dx.$ *Resp.:* $\frac{e^{2x}}{8} (2 - \text{sen } 2x - \cos 2x) + C$

51. $\int x e^x \cos x\, dx.$ *Resp.:* $\frac{e^x}{2} [x(\text{sen } x + \cos x) - \text{sen } x] + C$

CAPITULO 10

Cálculo de integrales definidas. Métodos

1. Para calcular una integral definida se aplica la fórmula $\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$, siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$.

2. *Por desarrollo en serie.* Se desarrolla en serie de potencias enteras la función que se va a integrar, y después se integra.

3. *Por artificios de cálculo.* Cuando se emplea una sustitución para calcular una integral definida hay dos maneras de hallar su valor. Primera: los límites de integración se cambian empleando la sustitución, y una vez calculada la integral se remplazan dichos valores en la función así calculada para hallar su valor. El segundo procedimiento es remplazar los límites originales una vez calculada la integral. Cuando la integración conduce a funciones trigonométricas recíprocas, se debe tener cuidado en elegir los valores principales de la integral.

Nota. Si la función $f(x)$ es discontinua en $x = \alpha$, α comprendido entre a y b, entonces

$$\int_a^b f\,dx = \lim \int_a^{\alpha-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim \int_{\alpha+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$$

si ε y ε' tienden a cero.

Si los límites de integración son infinitos se define: $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim \int_a^x f(x)\,dx$ si $x \to \infty$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 10-1 Halle $I = \int_0^{-1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solución. Haciendo $x = \text{sen}\,\theta$, $dx = \cos\theta\,d\theta$. Cuando $x = 0$, $\theta = 0$; si $x = -\frac{1}{2}$, $\theta = 7\pi/6$. Entonces

$$I = \int_0^{7\pi/6} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}} = \int_0^{7\pi/6} d\theta = \theta\Big|_0^{7\pi/6} = \frac{7\pi}{6}$$

Por otra parte, $\int_0^{-1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\,x\Big|_0^{-1/2} = \text{arc sen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, puesto que el valor principal de $\text{arc sen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Este ejemplo ilustra la importancia de los valores principales cuando se eligen los nuevos límites de integración para una sustitución trigonométrica.

Si se hubiera empezado con $x = 0$, $\theta = 0$; $x = -\frac{1}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$, la solución coincide con la segunda, que es la correcta.

Problema 10-2 Halle $I = \int_0^2 \sqrt{x+1}\, dx$.

Solución. Sea $x + 1 = z^2$, $dx = 2z\,dz$. Si $x = 0$, $z = 1$; $x = 2$, $z = \sqrt{3}$. Entonces

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{z^2} \cdot 2z\,dz = \int_1^{\sqrt{3}} z^2\,dz$$

No se elige $z = -1$ y $-\sqrt{3}$ porque se está usando la raíz positiva en la integración.

Problema 10-3 Halle $I = \int_1^9 \frac{dx}{3+5x}$.

Solución. Sea $3 + 5x = w$, $dx = dw$. Si $x = 1$, $w = 8$; $x = 9$, $w = 48$. Entonces

$$I = \frac{1}{5}\int_8^{48} \frac{dw}{w} = \frac{1}{5}\ln w\Big|_8^{48} = \frac{1}{5}(\ln 48 - \ln 8) = \frac{1}{5}\ln 6$$

Problema 10-4 Halle $I = \int_0^{2\pi/3} \operatorname{tg} x/(1 + \operatorname{sen} x)\cdot dx$.

Solución. Sea $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, $\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$; $\operatorname{tg} x = \frac{2z}{1-z^2}$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$. Si $x = 0$, $z = 0$; $x = \frac{2\pi}{3}$, $z = \sqrt{3}$. Entonces

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{2z}{1-z^2}\cdot\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}} = 4\int_0^{\sqrt{3}} \frac{z\,dz}{(1-z^2)(1+2z+z^2)} = 4\int_0^{\sqrt{3}} \frac{z\,dz}{(1-z)(1+z)^3}$$

Ahora,

$$\frac{z}{(1-z)(1+z^3)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1+z)^3} + \frac{C}{(1+z)^2} + \frac{D}{1+z}.$$

De donde

$$A = \frac{1}{8},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{1}{4},\ D = \frac{1}{8}$$

Entonces

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right)dz - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dz}{(1+z)^3} + \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dz}{(1+z)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{1}{4}\frac{1}{(1+z)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+z}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1+\sqrt{3})^2} - \frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)$$

Problema 10-5 ¿Qué hay de incorrecto en el cálculo de la siguiente integral?

$$\int_0^{2\ln|a|} \frac{dx}{e^x - a^2e^{-x}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-e^x}{a+e^x}\right|\ \Bigg|_0^{\ln a^2} = \frac{1}{2a}\left[\ln\left|\frac{a-a^2}{a+a^2}\right| - \ln\left|\frac{a-1}{a+1}\right|\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\ln\left|\frac{1-a}{1+a}\right| - \ln\left|\frac{a-1}{a+1}\right|\right] = 0$$

Solución. El dominio del intégrando es $]-\infty, \ln|a|[\ \cup\ ]\ln|a|, +\infty[$. Como $\ln|a|$ está en el intervalo $[0, 2\log|a|]$ y no está contenido en el dominio del integrando, la integral es impropia y, por tanto, el cálculo de la integral no es correcto.

Problema 10-6 Calcule la integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^5 + 1}$.

Solución. Se calcula de antemano la integral $\int \frac{dx}{x^5 + 1}$ (vea el Problema 8-11). Entonces

$$I = \int \frac{dx}{x^5 + 1} = \frac{1}{5} \ln (x + 1) - \frac{1}{20} \ln (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{5}}{20} \ln \frac{x^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} x + 1}{x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1} +$$

$$+ \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{10} \operatorname{arc\,tg} \frac{4x - (1 + \sqrt{5})}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10} \operatorname{arc\,tg} \frac{4x - (1 - \sqrt{5})}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + C = F(x)$$

Por consiguiente, $I = F(1) - F(0) = \frac{1}{5} \ln 2 + \frac{\sqrt{5}}{20} \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg} \frac{-1 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} +$

$$+ \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{-1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)$$

Se puede hacer una simplificación observando que $\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a - b}{1 + ab}$. Entonces

$$I = \frac{1}{5} \ln 2 + \frac{\sqrt{5}}{10} \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{10} \operatorname{arc\,tg} \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10} \operatorname{arc\,tg} \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Problema 10-7 Calcule la integral definida $I = \int_0^1 \frac{x^3\, dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

Solución. Hagamos $x^2 = t$, $2x\, dx = dt$. Los nuevos límites son para $x = 0$, $t = 0$, y para $x = 1$, $t = 1$.

Por consiguiente, $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t\, dt}{t^2 + t + 1}$.

Haciendo aparecer en el numerador la derivada del denominador y escribiendo $t = \frac{1}{2}(2t + 1) - \frac{1}{2}$,

entonces
$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} dt - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1}.$$

También
$$\int_0^1 \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} dt = \ln (t^2 + t + 1) \Big|_0^1 = \ln 3$$

Para calcular la segunda integral se descompone $t^2 + t + 1$ en cuadrados:

$$t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}; \text{ entonces } \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right|_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right)$$

Finalmente,
$$I = \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$$

Problema 10-8 Halle la integral definida $I = \int_0^{\pi/6} \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$.

Solución. Sea cos = t, $-\text{sen}\, x\, dx = dt$. Para hallar los nuevos límites de integración para $x = 0$, $t = 1$ y $x = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces

$$I = -\int_1^{\sqrt{3}/2} t^2\, dt = -\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - 1\right) = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{24}$$

Problema 10-9 Calcule la integral $I = \int_{5/3}^{7/3} \frac{dx}{\sqrt{4 - 9(x-2)^2}}$.

Solución.

$$I = \frac{1}{3}\int_{5/3}^{7/3} \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9} - (x-2)^2}} = \frac{1}{3}\left[\text{arc sen}\, \frac{x-2}{2/3}\right]_{5/3}^{7/3} = \frac{1}{3}\left[\text{arc sen}\, \frac{1}{2} - \text{arc sen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{9}$$

Problema 10-10 Calcule $I = \int_1^{7/4} \frac{dx}{9 + 16(x-1)^2}$.

Solución. $I = \frac{1}{16}\int_1^{7/4} \frac{dx}{\frac{9}{16} + (x-1)^2} = \frac{1}{16}\left[\frac{4}{3}\, \text{arc tg}\, \frac{x-1}{\frac{3}{4}}\right]_1^{7/4} = \frac{1}{12}\, (\text{arc tg}\, 1 - \text{arc tg}\, 0) =$ $= \frac{1}{12} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{48}$. Aquí se tomó la determinación del arco tangente comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Problema 10-11 Calcule $I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\,\text{sen}^2\, x}$.

Solución. Sea tg $x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}$. Los límites de integración se hallan haciendo $x = 0$ y $x = \frac{-\pi}{4}$. De donde $t = 0$ y $t = 1$.

Entonces $I = \int_0^1 \frac{dt}{a + bt^2} = \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \frac{a}{b}}$. Hay que considerar dos casos, según que las raíces del denominador sean reales o complejas.

Primer caso. $\frac{a}{b} > 0$ (raíces imaginarias). Entonces

$$I = \frac{1}{b}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}\, \text{arc tg}\, \frac{t}{\sqrt{\frac{a}{b}}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left(\text{arc tg}\, \sqrt{\frac{b}{a}} - \text{arc tg}\, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{ab}}\, \text{arc tg}\, \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Segundo caso. $\frac{a}{b} < 0$ (raíces reales). Si $-\frac{a}{b} > 1$ el denominador se anula en el intervalo de integración y, por consiguiente, la función es discontinua en ese intervalo.

Si $-\frac{a}{b} > 1$, se tiene que

$$I = -\frac{1}{b}\int_0^1 \frac{dt}{-\frac{a}{b}t^2} = -\frac{1}{b}\left[\frac{1}{2\sqrt{-\frac{a}{b}}}\ln \frac{\sqrt{-\frac{a}{b}} + t}{\sqrt{-\frac{a}{b}} - t}\right]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln \frac{\sqrt{-ab} - b}{\sqrt{-ab} + b}$$

Si $-\frac{a}{b} < 1$, entonces

$$I = -\frac{1}{b}\lim\int_0^{\sqrt{-\frac{a}{b}}+\varepsilon}\frac{dt}{-\frac{a}{b}-t^2} + \frac{1}{b}\lim\int_{\sqrt{-\frac{a}{b}}+\varepsilon'}^{1}\frac{dt}{t^2+\frac{a}{b}} \text{ si } \varepsilon \text{ y } \varepsilon' \text{ tienden a cero}$$

$$I = -\frac{1}{b}\lim\left[\frac{1}{2\sqrt{-\frac{a}{b}}}\ln\frac{\sqrt{-\frac{a}{b}}+t}{\sqrt{-\frac{a}{b}}-t}\right]_0^{\sqrt{-\frac{a}{b}}+\varepsilon} + \frac{1}{b}\lim\left[\frac{1}{2\sqrt{-\frac{a}{b}}}\ln\frac{t-\sqrt{-\frac{a}{b}}}{t+\sqrt{-\frac{a}{b}}}\right]_{\sqrt{-\frac{a}{b}}+\varepsilon'}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\lim\left(-\ln\frac{2\sqrt{-\frac{a}{b}}+\varepsilon}{\varepsilon} + \ln 1 + \ln\frac{\varepsilon'}{2\sqrt{-\frac{a}{b}}+\varepsilon'} - \ln\frac{1-\sqrt{-\frac{a}{b}}}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\lim\ln\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\left(2\sqrt{-\frac{a}{b}}+\varepsilon'\right)\left(2\sqrt{-\frac{a}{b}}-\varepsilon\right)} - \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\frac{b-\sqrt{-ab}}{b+\sqrt{-ab}}$$

Si ε y ε' tienden a cero, $\dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{\left(2\sqrt{-\frac{a}{b}}+\varepsilon'\right)\left(2\sqrt{-\frac{a}{b}}-\varepsilon'\right)}$ crece indefinidamente. Por consiguiente, I es infinita.

Problema 10-12 Calcule $I_m = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m x\, dx$, m entero positivo.

Solución. Integrando por partes, con $\text{sen}^{m-1} x = u \Rightarrow u' = (m-1)\,\text{sen}^{m-2} x \cos x$ y $\text{sen}\, x = v' \Rightarrow v = -\cos x$. Entonces

$$I_m = \left[-\text{sen}^{m-1} x \cos x\right]_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2}\text{sen}^{m-2} x \cos^2 x\, dx = (m-1)\,I_{m-2} - (m-1)\,I_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\,I_m = (m-1)\,I_{m-2} \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2} \quad (1)$$

Como $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$ e $I_1 = \int_0^{\pi/2}\text{sen}\, x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 1$.

Según (1) se obtiene que

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \qquad I_1 = 1$$

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0 \qquad I_3 = \frac{2}{3}I_1$$

$$I_4 = \frac{3}{4}I_2 \qquad I_5 = \frac{4}{5}I_3$$

....

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}I_{2p-2}, \qquad I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}I_{2p-1}$$

Multiplicando miembro a miembro se obtiene

$$I_{2p} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots 2p}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\ldots\frac{2p}{2p+1} = \frac{2\cdot 4\ldots 2p}{3\cdot 5\ldots(2p+1)}$$

Problema 10-13 Calcule $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x + 2}$.

Solución. Sea $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z \Rightarrow dx = \frac{2\,dz}{1 + z^2}$.

Los limites de integración son: para $x = 0$, $z = 0$
para $x = \frac{\pi}{2}$, $z = 1$.

Entonces $I = 2\int_0^1 \frac{dz}{z^2 + 2z + 3}$. Las raíces del denominador son imaginarias y, descomponiéndolo en cuadrados,

$$z^2 + 2z + 3 = (z + 1)^2 + 2$$

Por consiguiente,
$$I = 2\int_0^1 \frac{dz}{(z+1)^2 + 2} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{z+1}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{z+1}{\sqrt{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \sqrt{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

puesto que $\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{1+ab}$.

Problema 10-14 Halle $I = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

Solución. Sea $\cos x = z \Rightarrow -\operatorname{sen} x\, dx = dz$.
Los nuevos limites de integración son: para $x = 0$, $z = 1$
para $x = \frac{\pi}{4}$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Entonces
$$I = -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{1 - z^2}{z^3}\, dz = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z}\right) dz = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2} - \ln z\right]_{1/\sqrt{2}}^1 =$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2 + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

Problema 10-15 Halle $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 1}$.

Solución. Como $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$, entonces la descomposición en fracciones da

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right)$$

Entonces al integrar se obtiene

$$I = \left[\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x - 1)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \ln 1\right) +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{4}[\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2} + 1) - \operatorname{arc\,tg} 1] - \frac{\sqrt{2}}{4}[\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2} - 1) - \operatorname{arc\,tg}(-1)]$$

Como
$$\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = \ln(3 + 2\sqrt{2}),\quad \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}+1) - \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1) =$$
$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1)}{1 + (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \operatorname{arc\,tg} 1$$

Tomando los valores de la función inversa, arc tg x, entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ se obtiene

$$I = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$$

Problema 10-16 Halle $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}^3\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$.

Solución. Sea $a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = z^2 \Rightarrow 2ab\,\text{sen}\,\theta\, d\theta = 2z\,dz$.

Los nuevos límites de integración son: para $\theta = 0$, $z = a - b$

para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Entonces $I = -\frac{1}{4a^3b^3}\int_{a-b}^{\sqrt{a^2+b^2}} [(a^2 - b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)z^2 + z^4]\,dz =$

$$= -\frac{1}{4a^3b^3}\left[(a^2 - b^2)^2 z - \frac{2}{3}(a^2 + b^2)z^3 + \frac{1}{5}z^5\right]_{a-b}^{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= -\frac{1}{4a^3b^3}\left[(a^2 - b^2)^2\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{2}{3}(a^2 + b^2)(\sqrt{a^2 + b^2})^3 + \frac{1}{5}(\sqrt{a^2 + b^2})^5 - (a^2 - b^2)^2(a - b) +\right.$$

$$\left.+ \frac{2}{3}(a^2 + b^2)(a - b)^3 - \frac{1}{5}(a - b)^5\right] = \frac{1}{15a^3b^3}[2(a - b)^3(a^2 + 3ab + b^2) - \sqrt{a^2 + b^2}(2a^4 - 11a^2b^2 + 2b^4)]$$

Problema 10-17 Determine $I = \int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,x\,dx$.

Solución. Como $\int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx$, se tiene que

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\ln\,\text{sen}\,x + \ln\cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,x\cos x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\ln\frac{1}{2} + \ln\,\text{sen}\,2x\right)dx = -\frac{1}{2}\ln 2\int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,2x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,2x\,dx$$

Para calcular la última integral se hace $2x = u \Rightarrow 2\,dx = du$, y los límites de integración son:

para $x = 0$, $u = 0$

para $x = \frac{\pi}{2}$, $u = \pi$

Entonces $\int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\,\text{sen}\,u\,du$. Como sen x toma los mismos valores entre $\frac{\pi}{2}$ y π, y entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, entonces

$$\int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,2x\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\,\text{sen}\,2x\,dx$$

Por consiguiente,

$$\int_0^{\pi} \ln\,\text{sen}\,u\,du = \int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,u\,du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\,\text{sen}\,u\,du = 2\int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,u\,du$$

Entonces

$$I = -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

Problema 10-18 Halle $I = \int_0^1 \frac{\ln x \, dx}{1 - x}$.

Solución. Como la integral definida no se puede calcular es necesario emplear un desarrollo en serie.
Sea $1 - x = u \Rightarrow -dx = du$.
Los nuevos límites son: para $x = 0$, $u = 1$
para $x = 1$, $u = 0$.

Entonces $$I = -\int_1^0 \frac{\ln(1 - u)\,du}{u} = \int_0^1 \frac{\ln(1 - u)\,du}{u}$$

Como $\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \ldots$, se puede escribir

$$I = \int_0^1 \left(-1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{3} - \frac{u^3}{4} \ldots\right) du = \left[-u - \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{3} - \ldots\right]_0^1 =$$

$$= -1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \ldots = -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = -\frac{\pi^2}{6}$$

puesto que la suma de la serie es $\frac{\pi^2}{6}$.

Problema 10-19 Halle $I = \int_0^1 e^{\text{arc sen } x}\, dx$.

Solución. Sea $\text{arc sen } x = z \Rightarrow x = \text{sen } z \Rightarrow dx = \cos z\, dz$.
Los nuevos límites de integración son: para $x = 0$, $z = 0$
para $x = 1$, $z = \frac{\pi}{2}$.

Entonces $I = \int_0^{\pi/2} e^z \cos z\, dz$.

Integrando por partes, con $e^z = u \Rightarrow u' = e^z$ y $\cos z = v' \Rightarrow v = -\text{sen } z$.

Entonces $I = \left[e^z \text{ sen } z\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \text{sen } z\, dz$.

Calculando esta nueva integral por partes, con $e^z = u \Rightarrow u' = e^z$ y $\text{sen } z = v' \Rightarrow v = -\cos z$, se obtiene

$$\int_0^{\pi/2} e^z \text{ sen } z\, dz = \left[-e^z \cos z\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^z \cos z\, dz$$

Por tanto, $I = \left[e^z \text{ sen } z\right]_0^{\pi/2} - \left[-e^z \cos z\right]_0^{\pi/2} - I$. Entonces

$$I = \frac{1}{2}\left[e^z \text{ sen } z\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\left[-e^z \cos z\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} e^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$$

Problema 10-20 Pruebe que $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$.

Solución. Sea $g(x) = a + b - x$. Entonces $\int_a^b f(a + b - x)\, dx = -\int_a^b f[g(x)] \cdot g'(x) =$
$= -\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$. $\left(\text{Se empleó el teorema } \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'.\right)$

Problema 10-21 Empleando integración y recurrencia muestre que

$$\int_0^x \frac{f(u)(x - u)}{n!}\, du = \int_0^x \left[\int_0^{u_n} \left(\cdots\left(\int_0^{u_1} f(t)\, dt\right) du_1\right) \cdots\right] du_n$$

Solución. La fórmula es verdadera para $n = 1$, por el problema anterior. Suponga que es verdadera para n, y sea $F(u) = \int_0^u f(t)\,dt$.

Entonces F es una primitiva de f con $F(0) = 0$. Por tanto,

$$\int_0^x \frac{f(u)(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}\,du = \frac{F(u)(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_{u=0}^{u=x} - \int_0^x - \frac{F(u)(x-u)^n}{n!}\,du =$$

$$= 0 + \int_0^x \left[\int_0^{u_n} \left(\dots\left(\int_0^{u_1} F(t)\,dt\right) du_1\right)\dots\right] du_n = \int_0^x \left[\int_0^{u_n} \left(\dots\left(\int_0^{u_1}\left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du_1\right)\dots\right) du_n\right]$$

que también se puede escribir como

$$\int_0^x \left[\int_0^{u_{n+1}} \left(\dots\left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1\right)\dots\right] du_{n+1}$$

Problema 10-22 Muestre que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}$ y de ello concluya que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx}$$

Solución. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-3} x^2\,dx =$

$= \dots = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$

Al hacer el cociente de las dos integrales se obtiene el resultado pedido.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx}$$

Problema 10-23 Muestre que el cociente de las dos integrales en el problema anterior está comprendido entre 1 y $1 + \frac{1}{2n}$; partiendo de las desigualdades $0 < \operatorname{sen}^{2n+1} x \leq \operatorname{sen}^{2x} x \leq \operatorname{sen}^{2n-1} x$, para $0 < x < \pi/2$. Este resultado muestra que los productos $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$ se pueden aproximar a $\frac{\pi}{2}$ tanto como se quiera, y se escribe como el producto infinito de Wallis: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$

Solución. $0 < \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1} x \leq \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n} x\,dx \leq \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx$. Por tanto,

$$1 \leq \frac{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n} x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx} \leq \frac{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx} = \frac{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx}{\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n-1} x\,dx} = 1 + \frac{1}{2n}$$

Problema 10-24 Muestre que el producto $\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}{3\cdot 5\dots(2n+1)}$ se puede aproximar tanto como se quiera a $\sqrt{\pi}$.

Solución. Si n es lo suficientemente grande, entonces $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ está próximo a

$$\sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\ \dots\ 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\ \dots\ (2n-1)(2n+1)}} = \frac{2\cdot 4\ \dots\ 2n}{\sqrt{2n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ (2n-1)} = \frac{\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\ \dots\ 2n}{1\cdot 3\ \dots\ (2n-1)}$$

Como $\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}$ se aproxima a 1 para n lo suficientemente grande, con lo que se tiene el resultado.

Problema 10-25 No existe una fórmula elemental para calcular $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$, pero se puede hallar el valor exacto de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

a) Muestre que

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} \text{ e } \int_0^\infty \frac{1}{(1-x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}$$

b) Pruebe, empleando la derivada, que

$$1-x^2 \le e^{-x^2} \text{ para } 0\le x\le 1 \text{ y } e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \text{ para } 0\le x$$

c) Integre las potencias n-ésimas de las desigualdades entre 0 y 1 y de 0 a ∞, respectivamente. Después emplee la sustitución $y=\sqrt{n}x$ para mostrar que $\sqrt{n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} \le$ $\le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy \le \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy \le \frac{\pi}{2}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}$.

d) Emplee la parte *a*) de este problema para mostrar que $\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solución. *a*) Sea $x=\cos u$, $dx=-\operatorname{sen} u\,du$. Entonces $\int_0^1(1-x^2)^n\,dx = \int_{-\pi/2}^0 (\operatorname{sen}^{2n} u)(-\operatorname{sen} u)\,du =$ $= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} u\,du = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$, por el Problema 10-22.

Ahora sea $x=\operatorname{cotg} u$, $dx=-\operatorname{cosec}^2 u\,du$. Entonces $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_{\pi/2}^0 (\operatorname{sen}^{2n} u)\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u}\right)du =$ $= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2n-1\,u\,du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}$, por el Problema 10-22.

b) Si $f(y)=1-y$ y $g(y)=e^{-y} \Rightarrow f(0)=g(0)$ y $f'(y)=-1\le -e^{-y}$ para $y\ge 0$. Por tanto, $f(y)\le g(y)$ para $y\ge 0$, es decir, $1-y\le e^{-y}$ para $y\ge 0$. Por consiguiente, en particular, $1-x^2\le e^{-x^2}$, $\forall x$.

La segunda desigualdad es consecuencia de la desigualdad $1+y\le e^y$, que se demuestra en forma análoga.

c) $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \le \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx \le \int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx \le \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Por tanto, $\frac{2}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} \le \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx \le \int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}$. Empleando la sustitución $y=\sqrt{n}x$, $dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\,dy$, se obtiene $\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy$; $\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$, de lo cual se obtienen las desigualdades pedidas.

d) Es consecuencia de la parte *a*) de este problema para n suficientemente grande.

Los números $\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left[\sqrt{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\right]$ y $\sqrt{n}\cdot\frac{2}{3}\cdot$ $\cdot\frac{4}{5}\ \dots\ \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{3}\ \dots\ \frac{2n}{2n-1}\right]$ se pueden aproximar tanto como se quiera a $\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problema 10-26 Muestre que $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) x\, dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \pi$ para todo n.

Solución. $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$ para $\operatorname{sen} \frac{x}{2} \neq 0$. Entonces

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) x\, dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \int_0^{\pi} [1 + 2\cos x + \ldots + 2\cos nt]\, dx = \ldots = \pi$$

Problema 10-27 *a*) Si $f_1(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ y $f_2(t) = \int_0^x f_1(t)\, dt$, muestre que $f_2(x) = \int_0^x (x - t) f(t)\, dt$. En general, si $f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)\, dt$ para $k = 2, 3, \ldots$, entonces $f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x - t)^{k-1} f(t)\, dt$.

b) Si m y n son enteros positivos, muestre que $\int_0^1 (1 - x)^n x^m\, dx = \frac{m!\,n!}{(m + n)!}$.

Solución. *a*) Integrando por partes a $\int_0^x f_1(t)\, dt$, con $u = f_1(t)$ y $dv = dt \Rightarrow du = f_1'(t)\, dt$ y $v = t$.

Entonces

$$\int_0^x f_1(t)\, dt = t f_1(t)\Big|_0^x - \int_0^x t\, f_1'(t)\, dt = x f_1(x) - \int_0^x t\, f_1'(t)\, dt = x \int_0^x f(t)\, dt - \int_0^x t f(t)\, dt = \int_0^x (x - t) f(t)\, dt$$

Una integración por partes análoga produce la fórmula $f_n(x) = \int_0^x (x - t) f_{n-2}(t)\, dt$. En esta ecuación sea $u = f_{n-2}(t)$ y $dv = (x - t)\, dt$. Entonces $du = f_{n-3}(t)\, dt$, $v = \frac{-(x - t)}{2}$ y

$$\int_0^x (x - t) f_{n-2}(t)\, dt = -(x - t)^2 f_{n-2}(t)/2 \Big|_0^x + \int_0^x (x - t)^2 f_{n-3}(t)/2 \cdot dt = \int_0^x \frac{(x - t)^2 f_{n-3}(t)}{2}\, dt$$

Integrando de nuevo por partes se obtiene $f_n(x) = \int_0^x \frac{(x - t)^3 f_{n-4}(t)}{3!}\, dt$.

Continuando este proceso se obtiene

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f(t)\, dt$$

b) Si $f(x) = x^m$, entonces, según la parte *a*), $\int_0^1 (1 - x)^n x^m\, dx = n!\, f_{n+1}(1)$. Ahora

$$f_1(t) = \int_0^t x^m\, dx = t^{m+1}/(m + 1),\ f_2(t) = \int_0^t m!\, x^{m+1}/(m + 1)! \cdot dx =$$

$$= m!\, t^{m+2}/(m + 2)!, \ldots, f_k(t) = m!\, t^{m+k}/(m + k)!$$

Así, $n!\, f_{n-1}(1) = m!\, n!/(m + n + 1)!$

Problema 10-28 Muestre que $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{1/2}} = \begin{cases} 2 & \text{si } |\alpha| \leq 1 \\ \frac{2}{|\alpha|} & \text{si } |\alpha| > 1. \end{cases}$

Solución. Si $\alpha = 0$, entonces $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{1/2}} = 2$. De otra manera,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+\alpha^2-2\alpha x)^{1/2}} = (-1/\alpha)(1+\alpha^2-2\alpha x)^{1/2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\alpha}(1+\alpha^2+2\alpha)^{1/2} - \frac{1}{\alpha}(1+\alpha^2-2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}[(1+\alpha)^2]^{1/2} - \frac{1}{\alpha}[(1-\alpha)^2]^{1/2} = \frac{1}{\alpha}|1+\alpha| - \frac{1}{\alpha}|1-\alpha| =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(1+\alpha) - \frac{1}{\alpha}(1-\alpha) = 2 & \text{si } |\alpha| \le 1 \\ \frac{1}{\alpha}(1+\alpha) - \frac{1}{\alpha}(\alpha-1) = \frac{2}{\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ -\frac{1}{\alpha}(1+\alpha) - \frac{1}{\alpha}(1-\alpha) = -\frac{2}{\alpha} & \text{si } \alpha < -1. \end{cases}$$

Problema 10-29 Si $n > 1$, muestre que $\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^{2n})^{1/2}} < 0,524$.

Solución. Si $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow (1-x^{2n})^{1/2} < 1$ y $(1-x^{2n})^{1/2} > (1-x^2)^{1/2}$. Así, $1 < 1/(1-x^{2n})^{1/2} <$ $< 1/(1-x^2)^{1/2}$ y, por tanto,

$$\frac{1}{2} = \int_0^{1/2} dx < \int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^{2n})^{1/2}} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} < 0,524$$

Problema 10-30 Muestre que si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\phi < \int_0^{\phi} \frac{dx}{(1-\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2 x)^{1/2}} < \frac{\phi}{(1-\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\phi)^{1/2}}.$$

Solución. Si $0 < x < \phi < \frac{\pi}{2}$, entonces $(1-\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\phi)^{1/2} < (1-\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2 x)^{1/2} < 1$ o $1 < 1/(1-\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2 x) < 1/(1-\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\phi)^{1/2}$. Entonces

$$\phi = \int_0^{\phi} dx < \int_0^{\phi} \frac{dx}{(1-\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\phi)^{1/2}} < [1/(1-\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\phi)^{1/2}]\int_0^{\phi} dx = \phi/(1-\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\phi)^{1/2}$$

Problema 10-31 Muestre que $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \text{sen}\,\alpha x\ \text{sen}\,\beta x\,dx = 0$ si $|\alpha| \neq |\beta|$. ¿Cuál es el límite si $|\alpha| = |\beta|$?

Solución. Si $|\alpha| \neq |\beta|$, $\int_0^T \text{sen}\,\alpha x\,\text{sen}\,\beta\,dx = \frac{1}{2}\int_0^T [\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x]\,dx = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}$ $\text{sen}(\alpha-\beta)x - \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\text{sen}(\alpha+\beta)x\Big|_0^T = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\text{sen}(\alpha-\beta)T - \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\text{sen}(\alpha+\beta)T.$

Por tanto, $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \text{sen}\,\alpha x\,\text{sen}\,\beta x\,dx = 0$ si $|\alpha| \neq |\beta|$.

Si $|\alpha| = |\beta| \neq 0$, $\int_0^T \text{sen}\,\alpha x\,\text{sen}\,\beta x\,dx = \begin{cases} \int_0^T \text{sen}^2|\alpha|\,x\,dx & \text{si } \alpha\beta > 0 \\ -\int_0^T \text{sen}^2|\alpha|\,x\,dx & \text{si } \alpha\beta < 0. \end{cases}$

Ahora $\int_0^T \text{sen}^2|\alpha|\,x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^T [1-\cos 2|\alpha|\,x]\,dx = \frac{T}{2} - \frac{\text{sen}\,2|\alpha|\,T}{4|\alpha|}$ y, por tanto,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \text{sen}\,\alpha x\,\text{sen}\,\beta x\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |\alpha| = |\beta| \text{ y } \alpha\beta > 0. \\ -\frac{1}{2} & \text{si } |\alpha| = |\beta| \text{ y } \alpha\beta < 0 \end{cases}$$

Problema 10-32 *a*) Si a es un entero positivo, muestre que $\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{h\,dx}{h^2+x^2}=\pi$.

b) Si f es continua sobre $[-a, a]$, muestre que $\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx=\pi f(0)$.

Solución. *a*) $\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}\,dx=\lim_{h\to 0}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{h}-\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{a}{h}\right)\right]=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$

b) $\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx+f(0)\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}\,dx.$

Según *a*), $\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx=\pi f(0)+\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx.$

Si se hace $x = hy$, entonces

$$\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx=\int_{-a/h}^{a/h}\frac{1}{1+y^2}[f(hy)-f(0)]\,dy$$

Como f es continua en $[-a, a]$, se puede hallar $M > 0$ tal que $|f(z)-f(0)|\le M$, $\forall z\in[-a,a]$, y dado $\frac{\varepsilon}{2}>0$ se puede hallar δ tal que $0<\delta<a$, y si $|z|<\delta\Rightarrow|f(z)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{2\pi}$.

$$\text{Así, }\left|\int_{-a/h}^{a/h}\frac{dy}{1+y^2}[f(hy)-f(0)]\right|\le\int_{-\delta/|h|}^{\delta/|h|}\frac{dy}{1+y^2}[f(hy)-f(0)]+\int_{\delta/|h|}^{a/|h|}\frac{dy}{1+y^2}[f(hy)-f(0)]+$$

$$+\int_{-a/|h|}^{-\delta/|h|}\frac{dy}{1+y^2}[f(hy)-f(0)]\le\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta/|h|}^{-\delta/|h|}\frac{dy}{1+y^2}+M\int_{\delta/|h|}^{a/|h|}\frac{dy}{1+y^2}+M\int_{-a/|h|}^{-\delta/|h|}\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{|h|}-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-\delta}{M}\right)\right]+2M\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{|h|}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{|h|}\right]$$

Finalmente, se puede hallar $H > 0$ tal que si $|h| < H$, entonces

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{h}>\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{4M}\ \text{ o }\ 0<\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{|h|}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{|h|}<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{4M}=\frac{\varepsilon}{4M}$$

y, por tanto, si $|h| < H$,

$$\left|\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{|h|}-\operatorname{arc\,tg}\frac{-\delta}{|h|}\right]+\frac{2M\varepsilon}{4M}<\frac{\varepsilon}{2\pi}\pi+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Es decir,

$$\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx=0.\qquad\therefore\ \lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\left(\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx\right)=\pi f(0)$$



Area

El área es una función que asocia a pares de números reales (determinados subconjuntos del plano o figuras geométricas) un número real.

La función área A, para que dé resultados útiles, debe verificar los siguientes axiomas:

Axioma 1. $A(S) \in \mathbf{R}$ y $A(S) \geq 0$.
Axioma 2. Si $S_1 \subset S_2$ $A(S_1) \leq A(S_2)$.
Axioma 3. Si $S_1 = S_2$, entonces $A(S_1) = A(S_2)$.
Axioma 4. $A(S_1 \cup S_2) = A(S_1) \cup A(S_2)$ si, y solamente si, $S_1 \cap S_2 = \phi$.

Definición. Sea $f : X \to \mathbf{R}$ con $X = \{x : a \leq x \leq b\}$ y suponga que $f(x) \geq 0$ sobre X. Entonces el área limitada por el grafo de la función $y = f(x)$, el eje de las X de a a b, está dada por la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$.

Area comprendida entre los grafos de dos funciones

Definición. El área comprendida entre los grafos de las funciones f y g y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, está dada por la integral definida $A(S) = \int_a^b |f - g|\,dx, f \geq g$ o $g \geq f$.

Para hallar el área comprendida entre los grafos de las dos funciones y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, suponga que f y g son acotadas sobre $[a,b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. (Vea Fig. 11-1.) Entonces

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i(g) = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$I(f, P) = \sum_1^n m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

$$S(f, P) = \sum_1^n m_i(g)(x_i - x_{i-1})$$

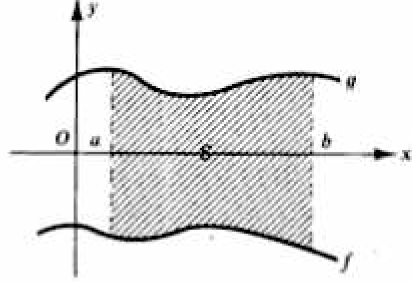


Figura 11-1

$M_i(f)$ y $M_i(g)$, los extremos superiores, y $S(f,P)$, $S(g,P)$, las sumas superiores correspondientes. Si f y g son integrables sobre $[a, b]$, se sabe que para cada $\varepsilon > 0$ existen particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$ tal que

$$-\varepsilon < I(f, P_1) - \int_a^b f \leq S(f, P_1) - \int_a^b f < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < I(g, P_2) - \int_a^b g \leq S(g, P_2) - \int_a^b g < \varepsilon$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$. Como P es un refinamiento de P_1 y P_2 se obtiene

$$\begin{aligned} -\varepsilon < I(f, P) - \int_a^b f \le S(f, P) - \int_a^b f < \varepsilon \\ -\varepsilon < I(g, P) - \int_a^b g \le S(g, P) - \int_a^b g < \varepsilon \end{aligned} \qquad (11\text{-}1)$$

Así hemos mostrado que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que (11-1) se verifica.

Suponga que $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. El grafo de f está por debajo del grafo de g sobre $[a, b]$. Sea $S = \{(x, y): a \le x \le b\}, f(x) \le y \le g(x)$. S está limitada por los grafos de f y g y las rectas $x = a$, y $x = b$.

Sea P una partición de $[a,b]$. (Vea Fig. 11-2.)

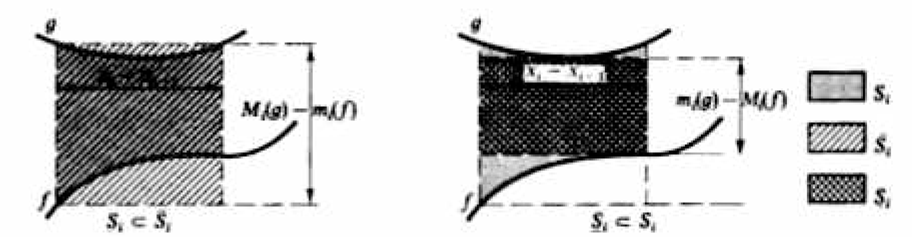


Figura 11-2

$S_i = \{(x, y): x_{i-1} \le x \le x_i, f(x) \le y \le g(x)\}$, $\bar{S}_i = \{(x, y): x_{i-1} \le x \le x_i, m_i(f) \le y \le M_i(g)\}$
$\underline{S}_i = \{(x, y): x_{i-1} \le x \le x_{i-1}, M_i(f) \le y \le m_i(g)\}$

Es evidente que $\underline{S}_i \subset S_i \subset \bar{S}_i$; $A(S) = \sum_1^n A(S_i)$ y $A(\underline{S}_i) \le A(S_i) \le A(\bar{S}_i)$.

Si $M_i(f) > m_i(g)$ —esto puede suceder—, $\underline{S}_i$ es vacío y $A(\underline{S}_i) = 0$. De otra manera,

$$A(\underline{S}_i) = [m_i(g) - M_i(f)](x_i - x_{i-1})$$

Entonces

$$[m_i(g) - M_i(f)](x_i - x_{i-1}) \le A(\underline{S}_i) \le A(S) \le A(\bar{S}_i) = [M_i(g) - m_i(f)](x_i - x_{i-1})$$

Sumando sobre todos los subintervalos de P se obtiene

$$\sum_1^n [m_i(g) - M_i(f)](x_i - x_{i-1}) \le A(S) \le \sum_1^n [M_i(g) - m_i(f)](x_i - x_{i-1})$$

Es decir, $I(f, g) - S(f, P) \le A(S) \le S(g, P) - I(f, P)$.

Restando $\int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g$ se obtiene

$$\left[I(g, P) - \int_a^b g\right] - \left[S(f, P) - \int_a^b f\right] \le A(S) - \int_a^b (g - f) \le \left[S(g, P) - \int_a^b g\right] - \left[I(f, P) - \int_a^b f\right]$$

Esta desigualdad se verifica para cada partición P de $[a, b]$. Entonces, según (11-1), para cada $\varepsilon > 0$,

$$-2\varepsilon < A(S) - \int_a^b (g - f) < 2\varepsilon. \quad \therefore \ A(S) = \int_a^b (g - f)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 11-1 Halle el área comprendida por los grafos de las siguientes funciones, el eje de las X y los intervalos indicados: *a)* $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$; *b)* $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0, 2\pi]$.

Solución. *a)* $\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2.$

b) $\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi.$

Problema 11-2 Halle el área de la región limitada por los grafos de las funciones $f(x) = 2x$ y $g(x) = x^2$ y sus puntos de intersección.

Solución. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x = x^2 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $x = 2$. Los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(2, 4)$. El área pedida es la diferencia de las áreas determinadas por f y g con el eje X en el intervalo $(0, 2)$.

$$\text{Area} = \int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2 = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Problema 11-3 *a)* Halle el área limitada por los grafos de $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$.

b) $y = x^3$ (parábola semicúbica) y la parábola $y = 2x - x^2$. (Vea Figs. 11-3 y 11-4.)

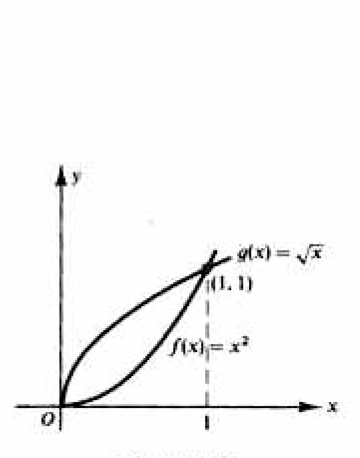


Figura 11-3

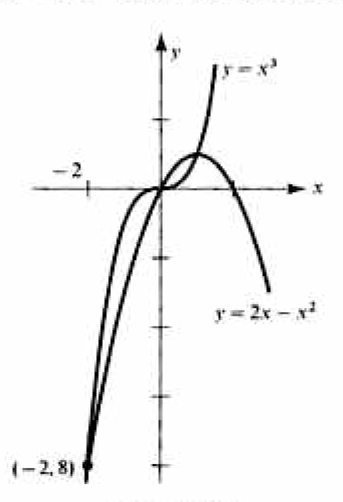


Figura 11-4

Solución. *a)* $\sqrt{x} - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ y $x - x^4 = 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ y $x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $x = 1$, que son las raíces de $f - g$. Por tanto, $A(S) = \int_0^1 \left|\sqrt{x} - x^2\right| dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

b) Las curvas se cortan ssi $x^3 = x(2 - x) \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2) = 0$. Los puntos de intersección son $(-2, -8)$, $(0,0)$ y $(1, 1)$. Entonces $A(S) = \int_{-2}^1 |x^3 - 2x + x^2|\,dx = \int_{-2}^0 (x^3 - 2x + x^2)\,dx -$

$$- \int_0^1 (x^3 - 2x + x^2)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{16}{4} + 4 + \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{88 - 51}{12} = \frac{37}{12}$$

Problema 11-4 *a*) Halle el área limitada por los grafos de $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

b) $g(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ y $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

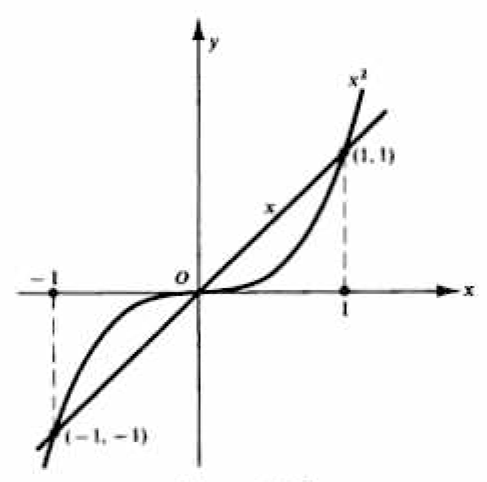


Figura 11-5

Figura 11-6

Solución. *a*) $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $x = \pm 1$. Así, -1 y 1 son los puntos extremos de $f - g$. Por tanto,

$$A(S) = \int_{-1}^{1} |x^3 - x|\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

b) Según la Figura 11-6, $f(x) \geq g(x)$ sobre $[0, 1]$ y $g(x) \geq f(x)$ en $[1, 5/2]$. $f = g \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = -x^3 + 4x^2 - 3x \Leftrightarrow x(x - 1)(2x - 5) = 0$, entonces $x = 0$ o $x = 1$ o $x = 5/2$.

Entonces el área buscada es

$$A(S) = \int_0^1 |(f - g)| = \int_0^1 (f - g) + \int_1^{5/2} (g - f) = \int_0^1 (2x^3 - 7x^2 + 5x)\,dx + \int_1^{5/2} (-2x^3 + 7x^2 - 5x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{2} - \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{-x^4}{2} + \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Big|_1^{5/2} = \frac{3253}{96}$$

Problema 11-5 Halle el área comprendida entre el grafo de la parábola $x = 4 - y^2$ y el eje Y.

Solución. Si $x = 0$, entonces $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$, que son los puntos donde corta al eje Y. Si $y = 0$, entonces $x = 4$, punto en el cual corta al eje X. El área es

$$A(S) = \int_0^4 \left|\sqrt{4 - x}\right| dx = \int_0^4 \sqrt{4 - x}\,dx + \int_4^0 -\sqrt{4 - x}\,dx = 2\int_0^4 \sqrt{4 - x}\,dx = -\frac{4}{3}(4 - x)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$

El área también se puede calcular expresando los dos grafos como $x = f(y)$ y $x = g(y)$ y limitándola entre las dos rectas $y = a$ y $y = b$.

$$A(S) = \int_a^b |f(y) - g(y)|\,dy = \int_{-2}^{2} |4 - y^2|\,dy = -\int_{-2}^{0} (4 - y^2)\,dy + \int_0^2 (4 - y^2)\,dy = 2\int_0^2 (4 - y^2)\,dy = \frac{32}{3}$$

Problema 11-6 *a*) Halle el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y su «latus rectum».

b) Halle el área comprendida entre los grafos de las funciones $y = 3x - x^2$ y $y = 3x^2 - x^3$ y $x = 0$, $x = 3$. (Vea Figs. 11-7 y 11-8.)

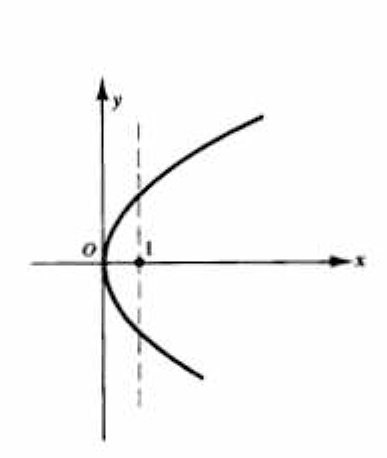


Figura 11-7

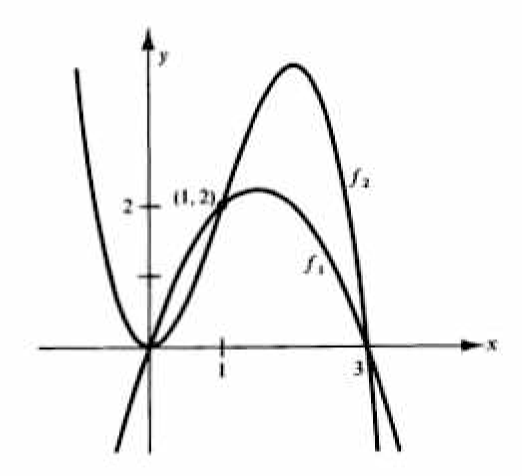


Figura 11-8

Solución. *a*) El foco de la parábola está en (1, 0) y $x = 1$ es la recta que coincide con el «latus rectum». Como el grafo es simétrico con respecto al eje X se tiene que

$$A(S) = 2\int_0^1 2x^{1/2}\,dx = 4\int_0^1 x^{1/2}\,dx = 4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

b) Las dos curvas se cortan en los puntos (0, 0), (1, 2) y (3, 0). Entonces

$$A(S) = \int_0^3 |f_1 - f_2|\,dx = \int_0^3 |3x - x^2 - 3x^2 + x^3|\,dx = \int_0^3 |3x - 4x^2 + x^3|\,dx =$$

$$= \int_0^1 (3x - 4x^2 + x^3)\,dx + \int_0^1 (-x^3 + 4x^2 - 3x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{3}\right)\Big|_1^3 = \frac{37}{12}$$

Problema 11-7 Halle el área comprendida entre los grafos de $xy = 1$ y $y(x^2 + 1) = x$ a la derecha de la recta $x = 1$.

Solución. Como el área se extiende hasta infinito, y como $f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)} < \frac{1}{x^3}$, la integral existe como el límite de una función estrictamente creciente y acotada del límite superior. (Vea Figura 11-9.) Entonces

$$\int_1^B (f - g) = \int_1^B \frac{dx}{x} - \int_1^B \frac{x\,dx}{x^2+1} = \ln B - \frac{1}{2}\ln(B^2+1) + \frac{1}{2}\ln 2$$

Ahora $\ln B - \frac{1}{2}\ln(B^2 + 1) = \ln\frac{B}{\sqrt{B^2+1}} = \ln\frac{1}{\sqrt{1 + B^{-2}}} \to \ln 1 = 0$. $\therefore\ \int_1^\infty (f - g)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2$.

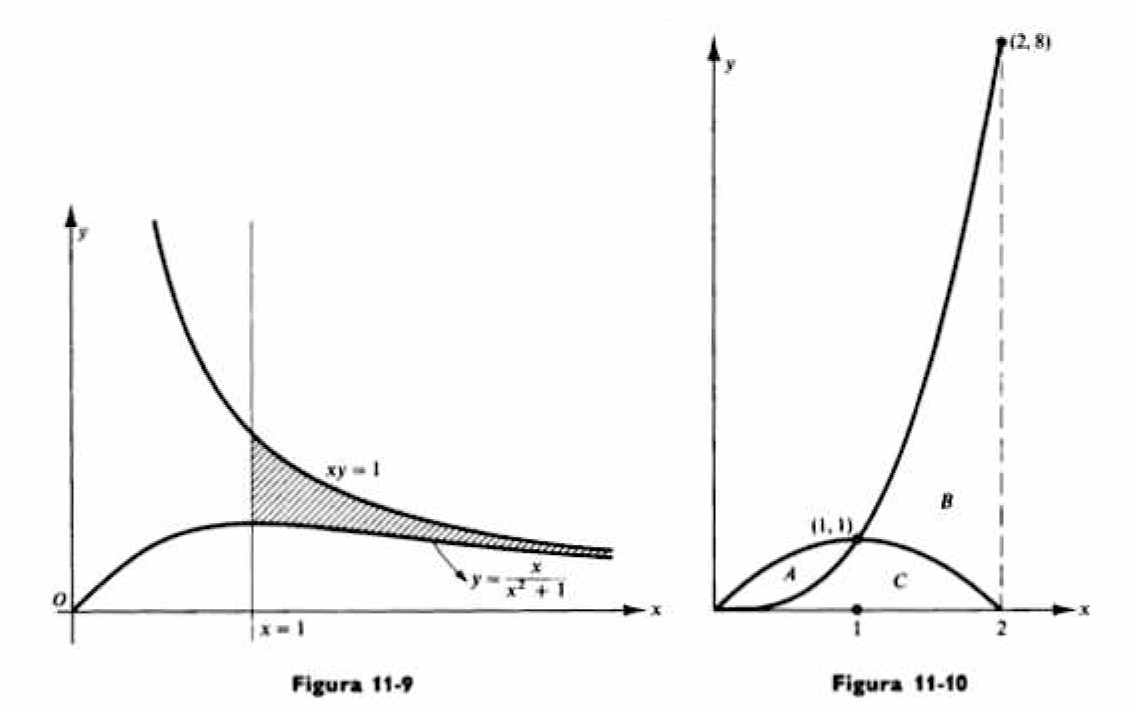


Figura 11-9

Figura 11-10

Problema 11-8 Halle el área de las regiones A, B y C que se muestran en la Figura 11-10.

Solución. El área de A es la región limitada por el grafo de $y = -x^2 + 2x$ y por debajo del grafo de $y = x^3$. Entonces el área está dada por $\int_0^1 [(-x^2 + 2x) - x^3]\, dx = \frac{5}{12}$.

El área de B está limitada por el grafo de $y = x^3$ en la parte superior y por el grafo de $y = -x^2 + 2x$ en la parte inferior. Entonces el área está dada por

$$\int_1^2 [x^3 - (-x^2 + 2x)]\, dx = \int_1^2 (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = \frac{37}{12}$$

El área de C se debe descomponer en dos partes. La primera limitada superiormente por el grafo de $y = x^3$ e inferiormente por el eje X, y a la derecha de la recta $x = 1$. Entonces el área es $\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$. La segunda parte está limitada superiormente por el grafo de $y = -x^2 + 2x$ e inferiormente por el eje X, y a la izquierda de la recta $x = 1$. Entonces su área es $\int_1^2 (-x^2 + 2x)\, dx = \frac{2}{3}$.

Por consiguiente, el área total de la región es $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$.

Problema 11-9 Halle el área comprendida por debajo del grafo de $y = e^x$ y por encima del grafo de $y = (1 + x^2)^{-1}$, entre el eje X y la recta $x = 1$. (Vea Fig. 11-11.)

Solución. Como el grafo de $y = e^x$ está por encima del grafo de $y = (1 + x^2)^{-1}$, el área está dada por la integral

$$\int_0^1 [e^x - (1 + x^2)^{-1}]\, dx = \int_0^1 e^x\, dx - \int_0^1 (1 + x^2)^{-1}\, dx = (e - 1) - (\text{arc tg } 1 - \text{arc tg } 0) = e - 1 - \frac{\pi}{4}$$

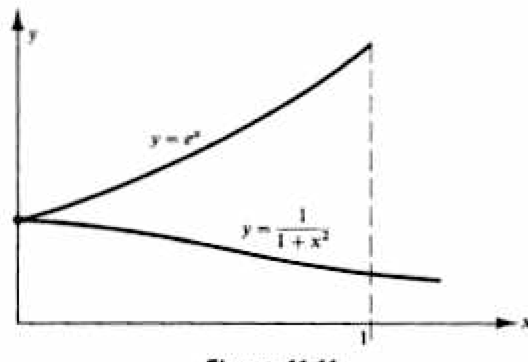


Figura 11-11

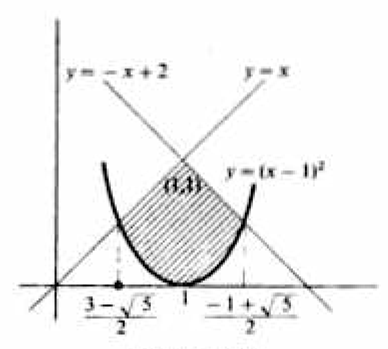


Figura 11-12

Problema 11-10 Halle el área limitada por las rectas $y = x$, $y = -x + 2$ y la curva $y = (x - 1)^2$. (Vea Fig. 11-12.)

Solución. Vamos a hallar los intervalos donde una de las funciones toma valores mayores que las demás. Haciendo $x = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Para hallar el otro punto de intersección hacemos $-x + 2 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Las dos rectas se cortan en $(1, 1)$. El área está dada por

$$A = \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{1} (x - (x - 1)^2)\,dx + \int_{1}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (-x + 2 - (x - 1)^2)\,dx = \frac{5}{2}\sqrt{5} - \frac{20}{3}$$

Problema 11-11 Determine el área limitada entre la cisoide de Diocles y su asíntota. La cisoide de Diocles tiene por ecuación $x^3 = y^2\left(\frac{1}{2p} - x\right)$.

Solución. Despejando $y = \pm x\sqrt{\dfrac{2p\,x}{1 - 2p\,x}}$, la descompone en las dos ramas simétricas representadas.

$S/2 = \int_0^{1/2p} x\sqrt{\dfrac{2p\,x}{1 - 2p\,x}}\,dx$, haciendo $2p\,x = t$, $x = \dfrac{t}{2p} \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2p}$, con $t(0) = 0$ y $t\left(\dfrac{1}{2p}\right) = 1$

Por tanto, $S/2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\,dt}{(2p)^2}\sqrt{\frac{t}{1 - t}} = \frac{1}{4p^2}\int_0^1 \frac{t^{3/2}\,dt}{\sqrt{1 - t}}$, que es una integral binomia en su tercer caso: $m = 3/2$, $n = 1$, $p = -1/2$, $\dfrac{m + 1}{n} + p = 2$.

Con la sustitución $1/t - 1 = u^2$, $t = \dfrac{1}{1 + u^2} \Rightarrow dt = \dfrac{-2u\,du}{(1 + u^2)^2}$, con $u(0) = \infty$, $u(1) = 0$. Entonces

$$S/2 = \frac{2}{4p^2}\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{u^{-1}\,u\,du}{(1 + u^2)^2} = \frac{1}{2p^2}\int_0^{\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^3} = \frac{1}{2p^2}\left[\frac{1}{8} \cdot \frac{3u^3 + 5u}{(1 + u^2)^2} + \frac{3}{8}\,\text{arc tg}\,u\right]_0^{\infty} = \frac{3\pi}{32p^2}$$

Luego $S = \dfrac{3\pi}{16p^2}$.

Problema 11-12 *a*) Determine el área limitada por el eje X y la curva de ecuación $y = e^{-ax}\,\text{sen}\,bx$ $(a > 0)$ entre $x = 0$ y $x \to \infty$.

b) Interpretando las áreas como la energía que un punto material sometido a movimiento armónico amortiguado intercambia con el medio exterior, determine la energía consumida por el movimiento. (Vea Fig. 11-13.)

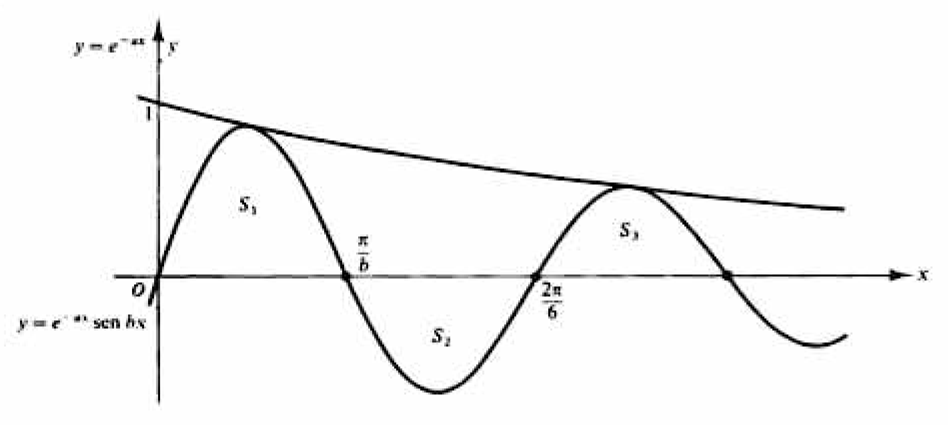


Figura 11-13

Solución. La forma de la curva corresponde a la elongación de un movimiento armónico amortiguado. El área de una onda cualquiera $S_j \left((j-1)\frac{\pi}{b} < x < j\frac{\pi}{b} \right)$, con la condición $j = 1, 2, \ldots$, es

$$S_j = \int_{\pi(j-1)/b}^{\pi j/b} e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \left[\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a \operatorname{sen} bx - b\cos bx) \right]_{\pi(j-1)/b}^{\pi j/b} = \frac{(-1)^{j-1} e^{-\pi a(j-1)/b}}{a^2+b^2}[e^{-\pi a/b}+1]$$

a) $\sum_{j=1}^{\infty} |S_j| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |S_j| = b/(a^2+b^2)\dfrac{[e^{-\pi a/b}+1]}{1-e^{-\pi a/b}} = \dfrac{b}{a^2+b^2}\operatorname{cotgh}\dfrac{\pi a}{2b}$, puesto que los módulos de S_j forman una progresión geométrica decreciente de razón $e^{-\pi a/b} < 1$.

b) $\sum_{j=1}^{\infty} S_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} S_j = b/(a^2+b^2)\dfrac{[e^{-\pi a/b}+1]}{1+e^{-\pi a/b}} = \dfrac{b}{a^2+b^2}$, puesto que los términos S_j forman una progresión geométrica decreciente de razón $-e^{-\pi a/b}$ con $|-e^{-\pi a/b}| < 1$.

Problema 11-13

Determine el área comprendida entre los grafos de las funciones $y = x^2$ y $y = \dfrac{2}{x^2+1}$. (Vea Fig. 11-14.)

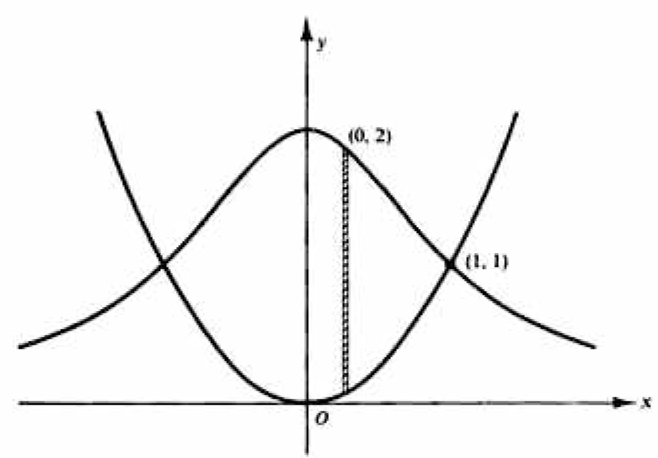


Figura 11-14

Solución. Las curvas se cortan en (1, 1). Entonces el área está dada por

$$A = \int_{-1}^{1} (y_2 - y_1)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{x^2+1} - x^2 \right) dx = \left(2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{-1}^{1} = \pi - \frac{2}{3}$$

Tomando bandas horizontales, el área está dada por

$$A = \int_0^1 [\sqrt{y} - (-\sqrt{y})]\, dy + \int_1^2 \left[\sqrt{-1 + \frac{2}{y}} - \left(-\sqrt{-1 + \frac{2}{y}}\right)\right] dy = \frac{4}{3} y^{3/2}\Big|_0^1 + 2\int_1^2 \sqrt{\frac{2}{y} - 1}\, dy$$

Haciendo $2/y - 1 = z^2$, $y = \dfrac{2}{z^2 + 1}$, $dy = \dfrac{-4z\, dz}{(z^2 + 1)^2}$, entonces $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dz}{z^2 + 1} + 4\int_1^0 \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}$.

En la segunda integral sea $z = \operatorname{tg} \theta$. $I = 4 \operatorname{arc\,tg} 1 + 4\displaystyle\int_{\pi/4}^0 \frac{\sec^2 \theta\, d\theta}{\sec^4 \theta} = \pi + 4\int_{\pi/4}^0 \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right) d\theta =$
$= \pi + 2\left(\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + \theta\right)\Big|_{\pi/4}^0 = \dfrac{\pi}{2} - 1. \qquad \therefore\ A = \pi - \dfrac{2}{3}.$

Problema 11-14 Halle el área limitada por la curva $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ y el eje X.

Solución. Como la curva es simétrica con respecto al eje Y se puede escribir

$$A = 2\int_0^{+\infty} y\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{8a^3\, dx}{x^2 + 4a^2} = 2 \lim_{b \to +\infty} 8a^3 \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 4a^2} = 8a^2 \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2a}\Big|_0^b =$$
$$= 8a^2 \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2a} = 4\pi a^2$$

Si la integración se toma a lo largo del eje Y se encuentra de nuevo una integral impropia

$$A = 2\int_0^{2a} \sqrt{-4a^2 + \frac{8a^3}{y}}\, dy = 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2a} \sqrt{-4a^2 + \frac{8a^3}{y}}\, dy$$

Problema 11-15 Determine el área total comprendida entre las curvas $y = a \operatorname{sen} x$, $y = b \cos x$. (Vea Fig. 11-15.)

Solución. Al dividir miembro a miembro las dos ecuaciones se encuentra que $x = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{b}{a}$; entonces los puntos de intersección de las dos curvas están dados por:

$$x_A = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ y } x_B = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Entonces $A = 2\displaystyle\int_{\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}}^{\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}} (a \operatorname{sen} x - b \cos x)\, dx = 2(-a \cos x - b \operatorname{sen} x)\Big|_{\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}}^{\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}} = \dfrac{8ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

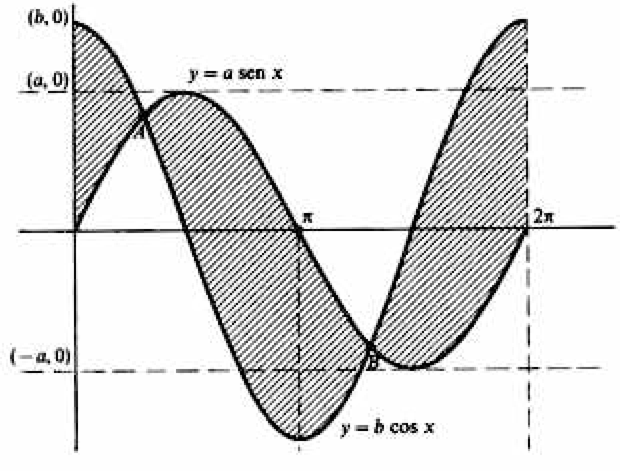


Figura 11-15

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle el área comprendida entre la recta $x - y - 1 = 0$ y el grafo de la ecuación $y^2 = 2x + 1$.
Resp.: $16/3$

2. Halle el área encerrada por la curva $y^2 = (1 - x^2)^3$. *Resp.:* $\frac{3}{4}\pi$

3. ¿Cuál es el área comprendida entre las curvas $y = \ln x/4x$ y $y = x \ln x$?
Resp.: $1/16\,(3 - 2 \ln 2 - 2 \ln^2 2)$

4. Halle las áreas de las dos regiones en que la curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al interior del círculo $x^2 + y^2 = 8$.
Resp.: $2\pi + 4/3$

5. Halle el área de las tres regiones que determina el grafo de $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = 1$ en el interior de la región determinada por $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$.
Resp.: Dos regiones tienen por área $A = \pi - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 3 - 2 \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{2}{3}}$ y la otra $A = 2(\pi - A)$

6. Halle el área de la figura comprendida entre la curva de Agnesi $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ y el eje de las X.
Resp.: πa^2

7. Calcule el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.
Resp.: 4

8. Calcule el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.
Resp.: $e + 1/2 - 2 = 2\,(\cosh 1 - 1)$

9. Halle el área limitada por la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. *Resp.:* $3/8\,\pi a^2$

10. Halle el área de la figura comprendida entre la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$, el eje Y y la recta $y = \frac{a}{2e}(e^2 + 1)$.
Resp.: $2a^2e^{-1}$

11. Calcule el área de la figura comprendida entre la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 9$, el eje X y el diámetro que pasa por el punto $(5, 4)$.
Resp.: $9/2 \ln 3$

12. Halle el área de la figura limitada por la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ y su asíntota $x = 2a$, $a > 0$.
Resp.: $3\pi a^2$

13. Halle el área de la figura comprendida entre el estrofoide $y^2 = \frac{x(x - a)^2}{2a - x}$ y su asíntota $(a > 0)$.
Resp.: $a^2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$

14. Escriba las integrales que se necesitan para calcular las áreas de las regiones limitadas por las siguientes curvas:

a) $y = 4x^2 - x4$.
Resp.: *a)* $4\int_0^2 \sqrt{4x^2 - x^4}\,dx$

b) $y = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0. \\ 4x - 5 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Resp.: *b)* $\int_{-1}^{0} [2x - (x - 1)]\,dx + \int_0^1 [(2x - 3) - (4x - 5)]\,dx$

c) $s = \begin{cases} t^2 & \text{si } t < 1 \\ -t & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} t/3 & \text{si } t < 1. \\ 2 - t^2 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$

Resp.: *c)* $\int_0^{1/3} \left(-\frac{t}{3} - t^2\right) dt + \int_{1/3}^{1} \left(t^2 - \frac{t}{3}\right) dt + \int_1^2 [(2 - t^2) - (-t)]\,dt$

d) $y = |x| - 1$ y $y = 1 - |x|$.
Resp.: *d)* $\int_{-1}^{1} 2(1 - |x|)\,dx$

e) $y = |\operatorname{sen} x|$ y $y = x^2 - 2\pi x$.
Resp.: *e)* $\int_0^{2\pi} [|\operatorname{sen} x| - (x^2 - 2\pi x)]\,dx$

f) $y = |4 - x^2|$ y $y = 2$.

CAPITULO 12

Volumen de sólidos de sección conocida

Suponga que existe un conjunto S de puntos de $\mathbf{R}^3$, que llamamos conjuntos medibles, y una función V, llamada función volumen, que asigna a cada conjunto medible S un número real $V(S)$, llamado volumen de S. La función volumen para que sea útil debe verificar los axiomas que se dan a continuación.

Definición axiomática de volumen. Suponga que existe una clase $\mathscr{A}$ de sólidos y una función V, de dominio $\mathscr{A}$, y que verifica los siguientes axiomas:

Axioma 1. *Positividad.* Para cada conjunto $S \in \mathscr{A}$, $V(S) \geq 0$.

Axioma 2. *Aditividad.* Si $S, T \in \mathscr{A}$, entonces $S \cup T$ y $S \cap T \in \mathscr{A}$ y $V(S \cup T) = V(S) + V(T) - V(S \cap T)$.

Axioma 3. Si $S, T \in \mathscr{A}$ con $S \subseteq T$, entonces $T - S \in \mathscr{A}$ y $V(S - T) = V(T) - V(S)$.

Axioma 4. *Principio de Cavalieri.* Si S y T son sólidos de Cavalieri (es decir, si S es un sólido y L una recta; F un plano perpendicular a L; $F \cap S$ es una sección transversal perpendicular a L, llamamos a S un sólido de Cavalieri) con área $(S \cap F) \leq$ área $(T \cap F)$ para todo plano F perpendicular a una recta dada, entonces $V(S) \leq V(T)$.

Axioma 5. Todo paralelepípedo pertenece a $\mathscr{A}$. Si a, b y c son lados de B, entonces $V(B) = abc$.

Axioma 6. Todo conjunto convexo pertenece a $\mathscr{A}$.

Consecuencias. Según el Axioma 3, $V(\phi) = 0$. Según el Axioma 3, $V(S) \leq V(T)$, $S, T \in \mathscr{A}$ y $S \subseteq T$.

Teorema del volumen por área seccional. Suponga que S es un sólido de Cavalieri con una sección transversal determinada por la función a_s, integrable en $[a, b]$ y cero fuera de $[a, b]$. Entonces el volumen de S es igual a la integral del área de la sección transversal.

$$V(S) = \int_a^b a_s(u)\, du$$

Demostración. Sea $P = \{a = z_0 < z_1 < \dots < z_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Como a_s es continua sobre $[a, b]$ y, por consiguiente, sobre cada uno de los subintervalos, según el teorema del valor extremo existen puntos $\bar{z}_i, \underline{z}_i \in [z_{i-1}, z_i]$ tal que $a_s(\bar{z}_i) = \max\{a_s(z)\colon z \in [z_{i-1}, z_i]\}$ y $a_s(\underline{z}_i) = \min\{a_s(z)\colon z \in [z_{i-1}, z_i]\}$. Sean $\bar{c}_i$ y $\underline{c}_i$ los cilindros que tienen a $a_s(\bar{z}_i)$ y $a_s(\underline{z}_i)$ por área

de la base y Δz_i como altura; por tanto, $\bar{c}_i$ y $\underline{c}_i$ se obtienen de S por planos que pasan por z_i y z_{i-1}. Según el axioma de Cavalieri,

$$\sum_1^n a_s(z_i)\Delta z_i \le V(S) \le \sum_1^n a_s(\bar{z}_i)\Delta z_i$$

Como $a_s(z)$ es integrable, tenemos que $V(S) = \int_a^b a_s(z)\, dx$.

Volúmenes de revolución

Se puede hallar el volumen de determinadas figuras partiendo del volumen de un cubo de lado a, definido por a^3. A continuación vamos a calcular el volumen de sólidos cuyo volumen se puede hallar por medio de una integral definida.

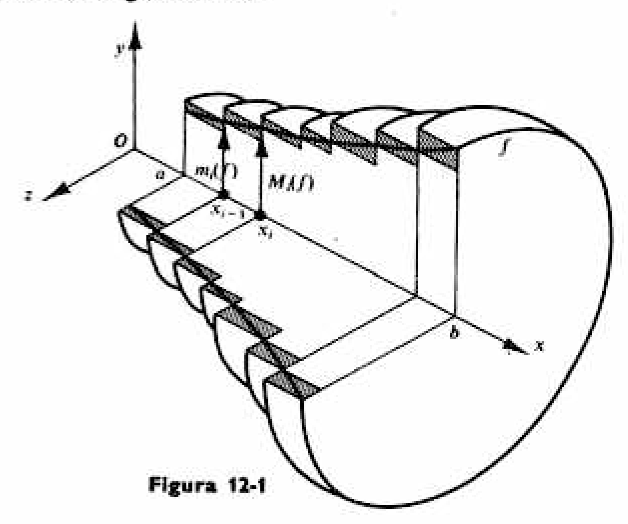


Figura 12-1

Los elementos de volumen son cilindros rectos circulares. El volumen de un cilindro es el área de la base multiplicada por la altura. Sea f una función continua y no negativa sobre $[a,b]$, $a < b$. (Vea Fig. 12-1.) Al girar el área limitada por el grafo de f y las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X, alrededor del eje X se obtiene un sólido de revolución. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Defina $m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Empleando la propiedad de inclusión y aditividad de la función volumen y sumando los volúmenes de los cilindros inscritos y circunscritos se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2(f)(x_i - x_{i-1}) \le V \le \sum_{i=1}^n \pi M_i^2(f)(x_i - x_{i-1})$$

Como $f \ge 0$, $m_i^2(f) = \inf\{f^2(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = m_i(f^2)$ y $M_i^2(f) = \sup\{f^2(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = M_i(f^2)$. $\therefore\ \pi \underline{\int_a^b} f^2 \le V \le \pi \overline{\int_a^b} f^2$. Como f es continua sobre $[a, b]$, f^2 también lo es y f^2 es integrable sobre $[a, b]$. Entonces

$$\underline{\int_a^b} f^2 = \int_a^b f^2 = \overline{\int_a^b} f^2 \quad \therefore \quad V = \pi \int_a^b f^2 \tag{12-1}$$

Nota. Si se hace girar una región alrededor del eje Y se obtiene un sólido de revolución que se determina en forma análoga a la anterior, siempre y cuando la función f sea monótona y biyectiva para que tenga una inversa $g(y)$. Entonces el volumen generado está determinado por

$$\pi \int_c^d [g(y)]^2\, dy \tag{12-2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 12-1 Halle el volumen de un cono recto circular de altura 10 y diámetro de la base 20. (Vea Fig. 12-2.)

Solución. El cono se genera al girar la recta $y = x$ alrededor del eje X, $x \in [0, 10]$. Empleando la fórmula que da este tipo de volúmenes se obtiene

$$V = \pi \int_0^{10} x^2\, dx = \frac{\pi}{3} 10^3$$

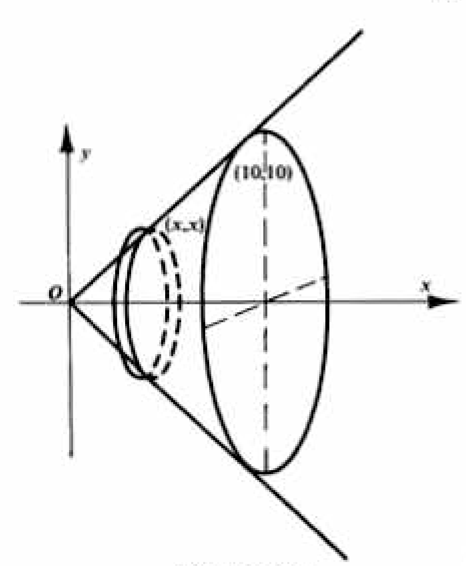


Figura 12-2

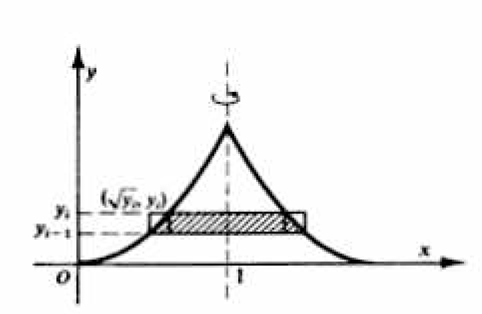


Figura 12-3

Problema 12-2 Sea C el arco de parábola $y = x^2$, $x \in [0, 1]$. Halle el volumen V del sólido de revolución obtenido al hacer girar el arco parabólico alrededor de la recta $x = 1$. (Vea Fig. 12-3.)

Solución. Sea $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ una partición de $[0, 1]$ sobre el eje Y. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(1 - \sqrt{y_i})^2(y_i - y_{i-1}) \le V \le \sum_{i=1}^{n} \pi(1 - \sqrt{y_{i-1}})^2(y_i - y_{i-1}) \Rightarrow \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2\, dy \le V \le$$

$$\le \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2\, dy \text{ y } V = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2\, dy = \pi \int_0^1 (1 - 2\sqrt{y} + y)\, dy = \pi \left[y - \frac{4}{3} y^{3/2} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Problema 12-3 Al hacer girar una circunferencia alrededor de una recta se obtiene un toro. (Vea Fig. 12-4.) Halle el volumen del toro generado al hacer girar un disco de radio r alrededor de una recta a una distancia $a > r$ del centro del círculo.

Solución. Tome el eje Y como eje de giro. El disco que genera el toro tiene centro en $(a, 0)$ y radio r. El medio disco de la parte superior es el conjunto de ordenadas de $f(x) = \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$ sobre $[a - r, a + r]$, puesto que $\{(x, y): (x - a)^2 + y^2 = r^2\}$ es la ecuación de una circunferencia. Por simetría, el volumen del

toro es el doble del volumen del sólido de revolución generado por el medio disco superior. Empleando la fórmula (12-1) se obtiene

$$V(S) = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx = \int_{a-r}^{a+r} x\sqrt{r^2 - (x-a)^2}\,dx = 4\pi \int_{a-r}^{a+r} [((x-a)+a)\sqrt{r^2-(x-a)^2}]\,dx =$$

$$= -2\pi \int_{a-r}^{a+r} [r^2 - (x-a)^2]^{1/2}(-2)(x-a)\,dx + 4\pi a \int_{a-r}^{a+r} \sqrt{r^2-(x-a)^2}\,dx =$$

$$= 0 + 4\pi a\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = 2\pi^2 a r^2$$

puesto que la última integral es el área de un semicírculo de radio r y, según el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_{a-r}^{a+r} [r^2 - (x-a)^2]^{1/2}(-2)(x-a)\,dx = \frac{2}{3}[r^2-(x-a)^2]^{3/2}\Big|_{a-r}^{a+r} = 0$$

Problema 12-4 Halle el volumen generado del área comprendida entre $y = x^2 + 1$ y $x = 1$, $x = 3$ alrededor del eje X.

Solución. El radio de una sección es $x^2 + 1$ y su área es $\pi(x^2+1)^2$. El volumen de un elemento de volumen, $\pi(x^2+1)^2\,dx$. El límite de la suma de estos elementos de $x = 1$ a $x = 3$ es

$$\int_1^3 \pi(x^2+1)^2\,dx = \pi\int_1^3 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Big|_1^3 = 67{,}73$$

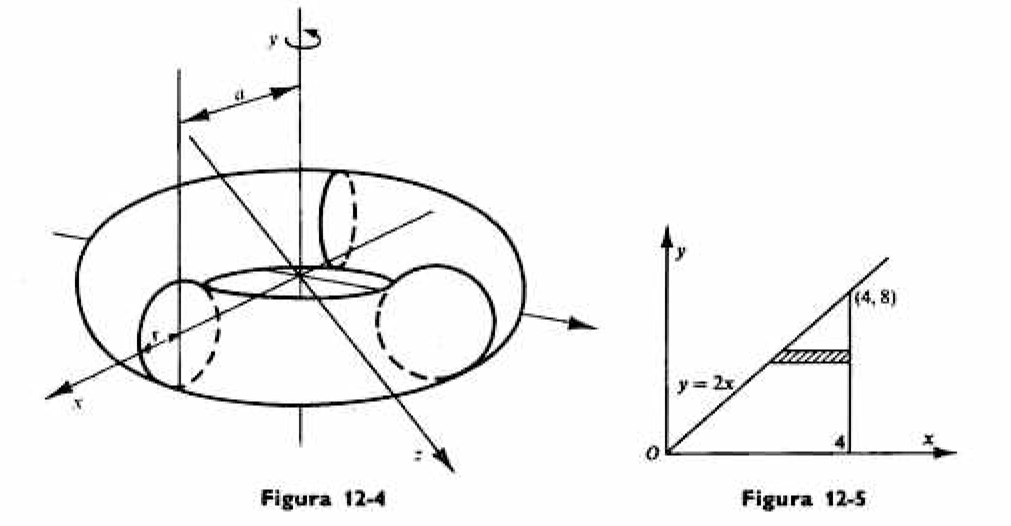


Figura 12-4 Figura 12-5

Problema 12-5 Halle el volumen generado al hacer girar la curva $y = x^2 + 1$ alrededor del eje Y desde $y = 1$ a $y = 5$.

Solución. El radio de una sección es el valor de x sobre la curva. De $y = x^2 + 1$ se obtiene $x = \sqrt{y-1} = (y-1)^{1/2}$, que es el radio, y el área de una sección es $\pi(y-1)$, y el volumen $\pi(y-1)\,dy$. Entonces $V = \int_1^5 \pi(y-1)\,dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Big|_1^5 = 8\pi$.

Problema 12-6 Se hace girar la recta $y = 2x$ alrededor del eje X desde $x = 0$ a $x = 4$. Genera un cono recto circular. Halle el volumen de este cono empleando tubos cilíndricos. (Vea Fig. 12-5.)

Solución. Se genera un tubo típico al hacer girar el área rayada alrededor del eje X. Su radio es el valor de y sobre la curva, y su circunferencia $2\pi y$. Su altura es 4, menos el valor de x sobre la curva, que es $y/2$. Su área lateral es $2\pi y(4 - y/2)$ y su volumen $2\pi y(4 - y/2)\,dy$. Entonces el volumen es

$$\int_0^8 2\pi y\left(4 - \frac{y}{2}\right)dy = \pi\left(4y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^8 = \frac{256\pi}{3}$$

Problema 12-7 Halle el volumen generado al hacer girar alrededor del eje Y la parte del grafo de $y + x^2 = 4$ que está por encima del eje X. *a*) Empleando discos. *b*) Empleando tubos.

Solución. *a*) $V = \int_0^4 \pi x^2\,dy = \int_0^4 \pi(4 - y)\,dy = \pi\left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 8\pi.$

b) $V = \int_0^2 2\pi xy\,dx = 2\pi\int_0^2 x(4 - x^2)\,dx = \pi\left(4x^2 - \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^2 = 8\pi.$

Problema 12-8 Halle el volumen del esferoide generado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, al hacerla girar alrededor del eje X.

Solución. Empleando discos se obtiene el volumen de $x = 0$ a $x = a$, y como la curva es simétrica, es el doble.

$$V = 2\int_0^a \pi y^2\,dx = 2\int_0^a \pi b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2\pi b^2\left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

Empleando tubos, el volumen está dado por

$$V = 2\int_0^b 2\pi yx\,dy = 4\pi\int_0^b a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\cdot y\,dy = 4\pi a\left(-\frac{b^2}{2}\right)\int_0^b\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}\left(-\frac{2y}{b^2}\right)dy =$$

$$= -2\pi ab^2\int_0^b\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} d\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = -2\pi ab^2\cdot\frac{2}{3}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}\Big|_0^b = -2\pi ab^2\cdot\frac{2}{3}(-1) = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

Problema 12-9 Halle el volumen de un segmento de esfera de radio a y h la altura del segmento.

Solución. Suponga que la esfera se genera al hacer girar el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ alrededor del eje X. La base del segmento está generada al hacer girar la recta $x = a - h$. Empleando discos perpendiculares al eje X, se obtiene

$$V = \int_{a-h}^a \pi y^2\,dx = \int_{a-h}^a \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{a-h}^a = \pi h^2\left(a - \frac{h}{3}\right)$$

Problema 12-10 A una esfera de radio a se le ha hecho un hueco esférico que pasa por el centro y de radio h. Halle el volumen V restante. (Vea Fig. 12-6.)

Solución. El sólido se puede generar al hacer girar un segmento de círculo alrededor de un diámetro del círculo que es paralelo a la cuerda del segmento. El elemento de volumen es un tubo cilíndrico generado al hacer girar el área rayada. El círculo es $x^2 + y^2 = a^2$.

$$V = \int_h^a 2\pi y(2x)\,dy = -2\pi\int_h^a (a^2 - y^2)^{1/2}(-2y\,dy) = -2\pi\cdot\frac{2}{3}(a^2 - y^2)^{3/2}\Big|_h^a = \frac{4}{3}\pi(a^2 - h^2)^{3/2}$$

Nota. Verifique este problema sumando el resultado obtenido al de la porción de la esfera que queda.

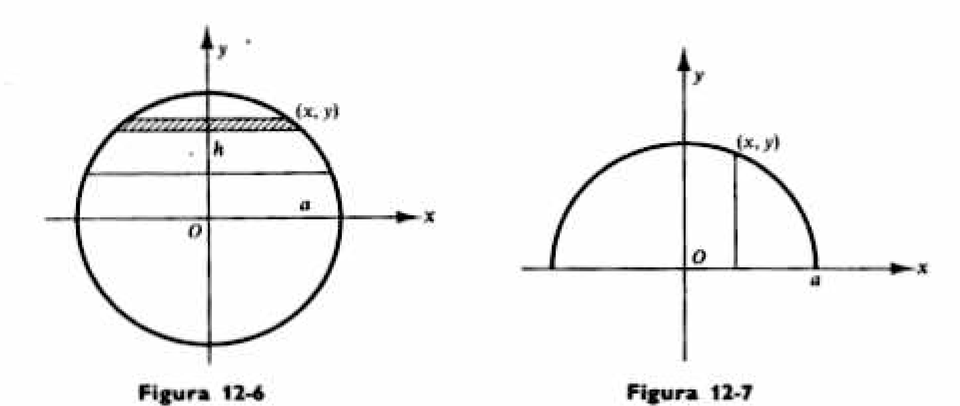


Figura 12-6 Figura 12-7

Problema 12-11 Un leñador corta un árbol de radio a. La base del corte es un semicírculo horizontal, y la parte superior forma un ángulo α con la base. Halle el volumen V de la madera quitada. (Vea Fig. 12-7.)

Solución. La madera quitada es una cuña. Divídala por planos perpendiculares a su borde. Cada uno de tales planos forma una sección triangular. La base del triángulo es $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. La altura del triángulo es $\sqrt{a^2 - x^2}$ tg α. Entonces el área del triángulo es $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{a^2 - x^2}$ tg α.

$$V = 2\int_0^a \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha \, dx = \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) \operatorname{tg} \alpha \Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3 \operatorname{tg} \alpha$$

Problema 12-12 Se genera una superficie por medio de una recta que siempre se mueve paralela al plano xz y tiene puntos en común con la recta $y + z = a$, $x = 0$, y la recta $x = b$, $z = 0$. Halle el volumen en el primer octante que determina esta superficie.

Solución. Divida el volumen pedido en elementos delgados por planos perpendiculares al eje Y. La sección modelo es un triángulo rectángulo de base b y altura $z = a - y$ y su volumen $\frac{1}{2}b(a - y)\,dy$.

$$\therefore \quad V = \int_0^a \frac{1}{2}b(a - y)\,dy = \frac{b}{2}\left(ay - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^a = \frac{1}{4}a^2b$$

Observe que el elemento de volumen no es exactamente un prisma triangular, sino una cuña, como se muestra en la Figura 12-8. Verifique que esta diferencia es $\frac{1}{4}b\Delta z\Delta y$ o $\frac{1}{4}b(\Delta y)^2$.

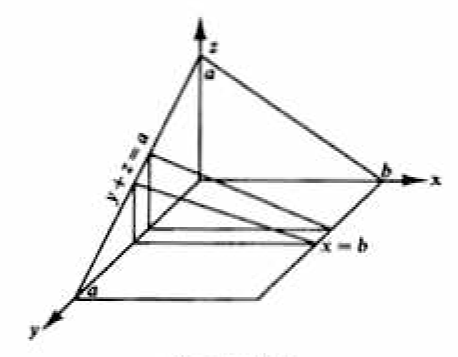


Figura 12-8

Problema 12-13 Halle el volumen cuando la curva $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ se hace girar alrededor del eje X.

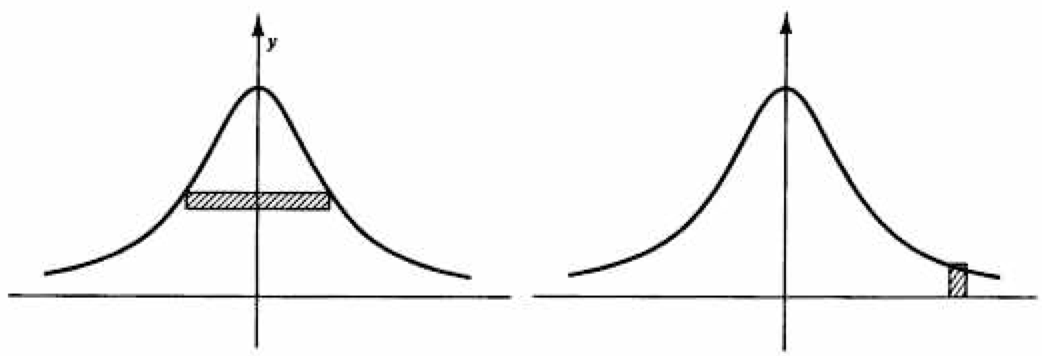


Figura 12-9

Solución. Eligiendo el elemento en forma de anillo, el volumen del elemento de área que se muestra en la Figura 12-9, $r = y$, $h = 2x$. $V = 4\pi \int_0^{2a} y\sqrt{-4a^2 + \frac{8a^3}{y}}\,dy$.

La sustitución $-4a^2 + \frac{8a^3}{y} = z^2$ cambia esta integral en la que se emplea a continuación. Eligiendo el elemento como el volumen del disco generado por el elemento de área $y\,dx$,

$$V = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^{\infty}\left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}\right)^2 dx$$

Sea $x = 2a \operatorname{tg}\theta$. Cuando $x = 0$, $\theta = 0$; cuando $x = \infty$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $V = 4a\pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2a}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\right)^2 \sec^2\theta\,d\theta =$ $= 16a^3\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = 16\pi a^3 \left(\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 4\pi^2 a^3.$

Problema 12-14 Halle el volumen de la Figura 12-10 que se genera cuando se hace girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor de la recta $y = b$.

Solución. Empleando el tubo que genera el elemento de área que se muestra en la figura, $h = 2x$, $r = b - y$.

$$V = 2\pi \int_b^{-b} 2x(b - y)(-dy) = -4\pi \int_b^{-b} (b - y)a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\,dy =$$
$$= -4\pi ab \int_b^{-b} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\,dy - \frac{4\pi ab^2}{3}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}\Big|_b^{-b}$$

Sea $y = b \operatorname{sen}\theta$. Entonces $V = -4\pi ab^2 \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta =$ $= -2\pi ab^2 \left(\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + \theta\right)\Big|_{+\pi/2}^{-\pi/2} = 2\pi^2 ab^2$

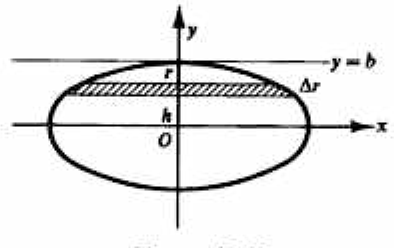


Figura 12-10

Problema 12-15 Halle el volumen generado al hacer girar alrededor del eje X un arco de la cicloide $y = a(1 - \cos\theta)$, $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$.

Solución. Empleando discos se encuentra que el volumen V es

$$V = \pi\int y^2\,dx = \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3\,d\theta = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos\theta + \frac{3}{2}(\cos 2\theta + 1) - \cos\theta + \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\right] d\theta =$$
$$= \pi a^3\left(\frac{5}{2}\theta - 4\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3$$

Problema 12-16 La elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\,\text{sen}\,\theta$, se hace girar alrededor del eje X. Halle el volumen que genera.

Solución. Empleando discos, el volumen generado es

$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx = \pi b^2\int_{\pi}^{0}\text{sen}^2\,\theta(-a\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta = -\pi ab^2\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$= \pi ab^2\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_{\pi}^{0} = \frac{4\pi ab^2}{3}$$

Problema 12-17 Halle el volumen del sólido de revolución que genera alrededor del eje X; el área por debajo del grafo de $y = -x^2 + 4$, por encima del grafo de $y = x^2$, entre el eje Y y la recta $x = \sqrt{2}$. (Vea Fig. 12-11.)

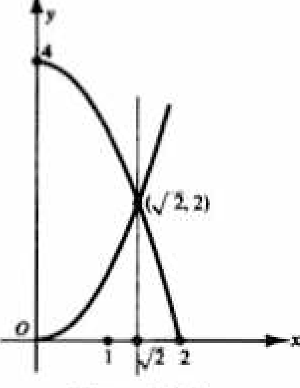


Figura 12-11

Solución. El volumen pedido es la diferencia entre los volúmenes de los dos sólidos de revolución determinados al girar alrededor del eje X el área por debajo del grafo de $y = -x^2 + 4$, entre $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$, y después girando alrededor del eje X únicamente la región por debajo de $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$. Las integrales resultantes son

$$\pi\int_0^{\sqrt{2}}(-x^2+4)^2\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{2}}(x^4 - 8x^2 + 16)\,dx = \pi\sqrt{2}\left(\frac{172}{15}\right) \text{ y } \pi\int_0^{\sqrt{2}} x^4\,dx = \pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$$

Entonces el volumen pedido es $\pi\sqrt{2}\left(\frac{172}{15} - \frac{4}{5}\right) = \pi\sqrt{2}\left(\frac{32}{3}\right)$.

Volumen de sólidos de sección conocida

Problema 12-18 Halle el volumen de una esfera de radio r.

Solución. Suponga colocado el centro de la esfera en el centro de un sistema de coordenadas. Sea $R(z)$ el radio del disco y $a_s(z)$ se obtiene como la intersección de la esfera con el plano que pasa por $(0, 0, z)$ y paralelo al plano XY. Entonces, según el teorema de Pitágoras, $R^2(z) = r^2 - z^2$; por tanto, el área del disco está dada por $A[a_s(z)] = \pi R^2(z) = \pi(r^2 - z^2)$.

El volumen se obtiene, según el teorema del volumen por área seccional, por medio del área de la sección como sigue:

$$V(S) = \int_{-r}^{r}\pi(r^2 - z^2)\,dz = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - z^2)\,dz = \pi\left(r^2z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Problema 12-19 Halle la fórmula del volumen de una cuña formada a partir de un cilindro recto circular, pasando un plano por el diámetro de la base y a 45° con la misma.

Solución. Las secciones que se determinan por planos perpendiculares a la cuña son triangulares. (Vea Figura 12-12.)

Entonces para $z \in [-r, r]$ los lados del triángulo son $\sqrt{r^2 - z^2}$ y, por tanto, el área es $1/2(r^2 - z^2)$. Según el teorema que determina el volumen por medio de un área seccional, tenemos que

$$V(S) = \int_{-r}^{r}\frac{1}{2}(r^2 - z^2)\,dz = \frac{1}{2}\left(r^2z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{2}{3}r^3$$

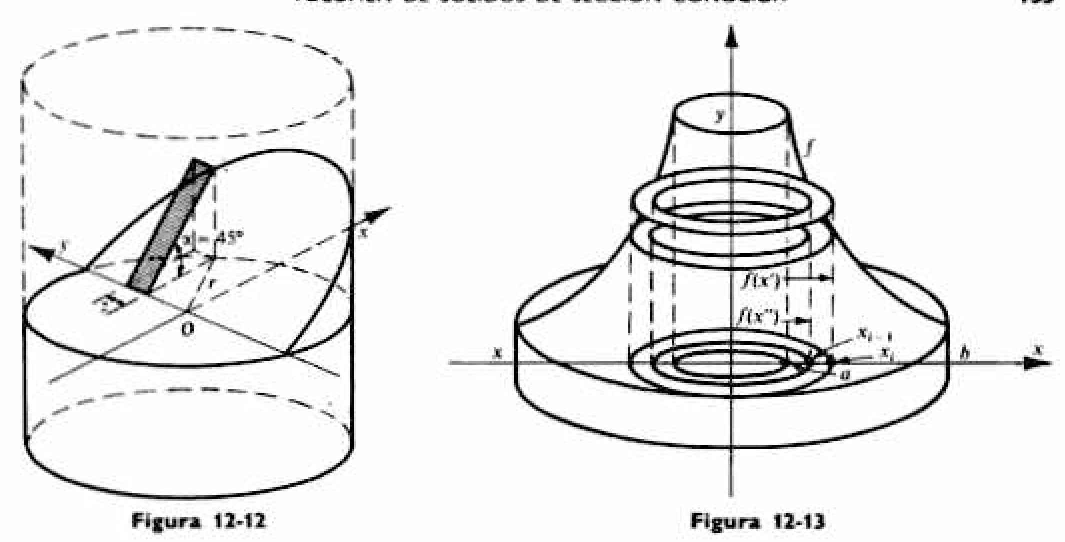


Figura 12-12 **Figura 12-13**

Problema 12-20 Si V es el volumen de un sólido de revolución obtenido al hacer girar el área determinada por debajo del grafo de f, entre $x = a$ y $x = b$ y el eje Y. Si f no es negativa en $[a, b]$ y si $b \geq a \geq 0$, muestre que $V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$. (Vea Fig. 12-13.)

Solución. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $f(x_i')$ y $f(x_i'')$ los valores máximo y mínimo, respectivamente, de f sobre $[x_{i-1}, x_i]$. La continuidad de f sobre $[x_{i-1}, x_i]$ asegura que los puntos $x_i, x_i'' \in \in [x_{i-1}, x_i]$ existen. Sea V_i el volumen del sólido de revolución obtenido al girar el área que queda por debajo del grafo de f, entre $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$, alrededor del eje Y. Entonces

$$(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2)f(x_i') \leq V_i \leq (\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2)f(x_i'') \text{ y } 2\pi \sum_1^n \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})f(x_i')(x_i - x_{i-1}) \leq V \leq$$
$$\leq 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})f(x_i'')(x_i - x_{i-1})$$

Tomando $g = x$ en el teorema del volumen por área seccional, hallamos que $(1/2(x_i + x_{i-1}) \in [x_{i-1}, x_i])$, el límite de los dos lados de la desigualdad anterior es $2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$. Por tanto, si $||P|| \to 0$, entonces $V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$.

Nota. Si el eje de revolución es la recta $x = c$, $c \in [a, b]$, entonces $V = 2\pi \int_a^b |c - x| f(x)\,dx$. Piense en $|c - x|$ como el radio de un tubo de altura $f(x)$ y espesor dx. El volumen de este tubo es $2\pi\,|c - x|\,f(x)\,dx$.

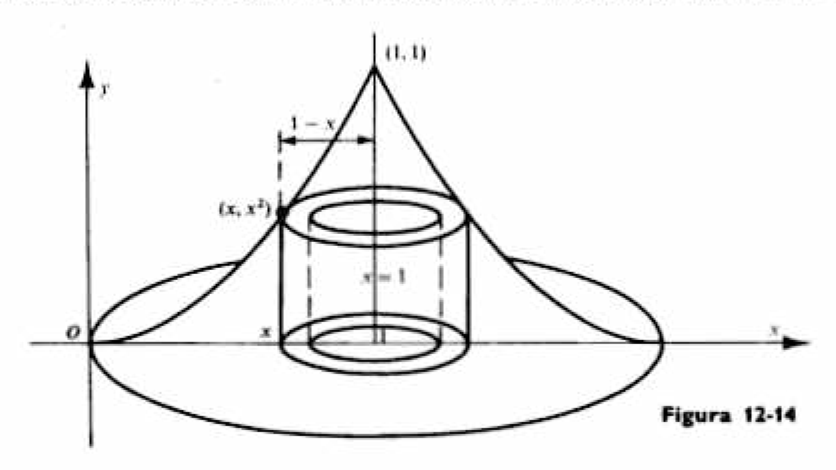


Figura 12-14

Problema 12-21 Sea C el arco de parábola $y = x^2$, $x \in [0,1]$. Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al girar el arco parabólico C alrededor de la recta $x = 1$. (Vea Figura 12-14.)

Solución. Empleando el método de los tubos obtenemos que

$$V = 2\pi \int_0^1 |1 - x| x^2 \, dx = 2\pi \int_0^1 (1 - x)x^2 \, dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

Problema 12-22 Considere un sólido, con el área de cada sección transversal, perpendicular a una recta dada. Sea h la altura del sólido medida a lo largo de la recta y $A(z)$ el área de la sección transversal a la altura z. Muestre que si A es integrable sobre $[0, h]$, el volumen V del sólido es $V = \int_0^h A(z)\, dz$.

Solución. Sea $P = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ una partición de $[0, h]$. Sea V el volumen del sólido comprendido entre $z = z_{i-1}$ y $z = z_i$. Sea $m_i(A) = \inf \{A(z) \colon z \in [z_{i-1}, z_i]\}$. Sea $M_i(A)$ el correspondiente sup. Entonces $m_i(A)(z_i - z_{i-1}) \le V_i \le M_i(A)(z_i - z_{i-1})$.

Sumando sobre todos los subintervalos de P se obtiene

$$I(A, P) = \sum_1^n m_i(A)(z_i - z_{i-1}) \le V \le \sum_1^n M_i(A)(z_i - z_{i-1}) = S(A, P). \quad \therefore \quad \int_0^h A \le V \le \int_0^h A.$$

Como se supuso que A es integrable en $[0, h]$, entonces $V = \int_0^h A$. (Vea Fig. 12-15.)

Figura 12-15

Problema 12-23 Se hace un hueco de diámetro a a una esfera de radio a. Halle el volumen de la esfera hueca.

Solución. Suponga que el sólido se corta en discos por planos perpendiculares al eje Y; cada disco es de espesor Δy y radio interior $r_1 = a/2$ y radio exterior $r_2 = x = \sqrt{a^2 - y^2}$.

El área del disco es $\pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi\left(\frac{3}{4}a^2 - y^2\right)$, el volumen aproximadamente $V \approx \sum_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \pi\left(\frac{3}{4}a^2 - y^2\right)\Delta y$

y el valor exacto $V = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \pi\left(\frac{3}{4}a^2 - y^2\right)\Delta y = \int_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \pi\left(\frac{3}{4}a^2 - y^2\right) dy = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3.$

Problema 12-24 La base de un sólido es un triángulo equilátero de lado s, con un vértice en el origen y la altura a lo largo del eje X. Cada sección plana perpendicular al eje X es un cuadrado; un lado está sobre la base del sólido. Halle el volumen del cuerpo.

Solución. La Figura 12-16(a) representa la base del sólido con una franja de ancho Δx que corresponde a un elemento de volumen del sólido $\Delta V \approx A(x)\Delta x$, con $A(x) = (2y)^2 = 4y^2$, el área del elemento. Este elemento se extiende hacia arriba a partir del plano del papel, Figura 12-16(b).

Como el triángulo de la base es equilátero, su altura h está dada por

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}s^2, \quad \therefore \quad h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$$

Por semejanza de triángulos tenemos que $2y/x = 2/h = 2/\sqrt{3} \Rightarrow y = x/\sqrt{3}$. Por tanto,

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^{s\sqrt{3}/2} \frac{4}{3}x^2\,dx = \frac{s^3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}hs^2$$

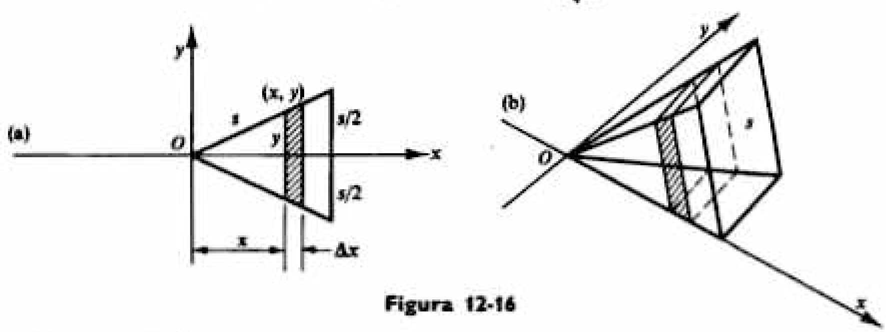


Figura 12-16

Problema 12-25 Halle el volumen del sólido comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$ si la sección transversal para cada z es el área determinada por la curva $y = z^2 - x^2$ para $-z \leq x \leq z$.

Solución. Para hallar el volumen, primero se debe hallar el área de la sección transversal, que es

$$A(z) = \int_{-z}^{z} (z^2 - x^2)\,dx = \left(z^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-z}^{z} = \frac{4}{3}z^3$$

Entonces
$$V = \int_0^1 A(z)\,dz = \frac{4}{3}\int_0^1 z^3\,dz = \frac{1}{3}$$

Problema 12-26 Halle el volumen del sólido generado cuando el área limitada por la cicloide $x = a(\theta = \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 2\pi a$, se hace girar alrededor del eje Y.

Solución. El volumen está dado por la integral $V = 2\pi\int_0^{2\pi} a(\theta - \text{sen}\,\theta)a(1 - \cos\theta)a(1 - \cos\theta)\,d\theta =$
$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(\theta - \text{sen}\,\theta)(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}[\theta - 2\theta\cos\theta + \theta\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}\,\theta$
$\cos\theta - \text{sen}\,\theta\cos^2\theta]\,d\theta = 4\pi a^3 + 2\pi a^3\cos\theta\Big|_0^{2\pi} + \dfrac{2\pi a^3}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{2\pi} + 2\pi a^3\int_0^{2\pi}\text{sen}\,2\theta\,d\theta - 4\pi a^3\int_0^{2\pi}\theta\cos\theta\,d\theta +$
$+ 2\pi a^3\int_0^{2\pi}\theta\cos^2\theta\,d\theta.$

La segunda y tercera expresión son nulas, y

$$\int_0^{2\pi}\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\theta + \theta\cos 2\theta)\,d\theta = \pi^2 + \frac{\theta\,\text{sen}\,2\theta}{4}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\text{sen}\,2\theta\,d\theta = \pi^2$$

Entonces $V = 4\pi^3a^3 + 2\pi^3a^3 = 6\pi^3a^3$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Aplicando el teorema del volumen por área seccional justifique el volumen de los siguientes sólidos: *a*) cilindro recto circular $\pi r^2 h$; *b*) segmento esférico de una base $1/3\pi h^2(3r - h)$; *c*) tronco de cono recto circular $\frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$; *d*) segmento esférico de dos bases $\frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$.

2. Un sólido tiene una base circular de radio r. Halle el volumen del sólido si toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. *Resp.:* $\frac{4}{3}\sqrt{3}r^3$

3. Halle el volumen de revolución engendrado por los siguientes conjuntos alrededor del eje Y: *a*) $\sqrt{4 - x^2}$ sobre $[0, 2]$; *b*) $\operatorname{sen} x/x$ sobre $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$; *c*) $\operatorname{sen} x$ sobre $[0, \pi]$.

Resp.: *a*) $16\pi/3$; *b*) $2\pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$; *c*) $2\pi^2$

4. Determine el volumen de revolución engendrado al girar la curva $y = \frac{3x}{x^2 + 3}$ alrededor del eje X.

Resp.: $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi^2$

5. Determine el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la cisoide de Diocles $x^3 = y^2(a - x)$ alrededor del eje X, entre 0 y $a/2$. *Resp.:* $V = \pi a^3(12 - 2/3)$

6. Halle el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje X la superficie limitada por la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$, el eje X y las rectas $x = \pm a$. *Resp.:* $\frac{a^3\pi}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$

7. Halle el volumen del cuerpo engendrado al girar la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, el eje X y la recta $x = 1$ alrededor del eje X. *Resp.:* $\frac{\pi}{4}$

8. Halle el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor de la recta $y = -p$ la figura limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y por la recta $x = p/2$. *Resp.:* $\frac{4}{3}\pi p^3$

9. Halle el volumen del cuerpo que se engendra al girar la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ alrededor de su asíntota $x = 2a$. *Resp.:* $2\pi^2 a^3$

10. Demuestre que el volumen de la parte del cuerpo de revolución, engendrado al girar la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ alrededor del eje X, que intercepta el plano $x = 2a$, es igual al volumen de una esfera de radio a.

11. Halle los volúmenes de los cuerpos engendrados al girar la figura limitada por un arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ y por el eje X, alrededor: *a*) del eje X; *b*) del eje Y, y *c*) del eje de simetría de la figura. *Resp.:* *a*) $5\pi^2 a^3$; *b*) $6\pi^3 a^3$; *c*) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16)$

12. Halle el volumen del obelisco cuyas bases paralelas son rectángulos de lados A, B y a, b y la altura h.

Resp.: $\frac{h}{3}\left(AB + \frac{Ab + aB}{2} + ab\right)$

13. Sobre las cuerdas de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, paralelas al eje X, se han construido unos cuadrados cuyos lados son iguales a las longitudes de las cuerdas y los planos en que se encuentran son perpendiculares al plano XOY. Halle el volumen del cuerpo que forman estos cuadros.

Resp.: $\frac{128}{105}a^3$

14. Un círculo deformable se desplaza de tal forma que uno de los puntos de su circunferencia descansa sobre el eje Y; el centro describe la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, mientras que el plano del círculo es perpendicular al plano XOY. Halle el volumen del cuerpo engendrado por dicho círculo.

Resp.: $\frac{8}{3}\pi a^2 b$

15. El plano de un triángulo móvil permanece perpendicular al diámetro fijo de un círculo de radio a. La base del triángulo es la cuerda de dicho círculo, mientras que su vértice resbala por una recta paralela al diámetro fijo, que se encuentra a una distancia h del plano del círculo. Halle el volumen del cuerpo (conoide) engendrado por el movimiento de este triángulo desde un extremo del diámetro hasta el otro.

Resp.: $\frac{1}{2}\pi a^2 h$

16. Halle el volumen del cuerpo limitado por los cilindros $x^2 + z^2 = a^2$ y $y^2 + z^2 = a^2$.

Resp.: $\frac{16}{3}a^3$

17. La sección transversal de determinado sólido por cualquier plano perpendicular al eje X es un círculo de diámetro AB con A sobre la curva $y = 4x$ y B sobre la curva $x = 4y$. Halle el volumen del sólido comprendido entre los puntos de intersección de las curvas.

18. Considere las regiones A, B y C del Problema 11-8: *a*) Halle el volumen de los sólidos de revolución que se generan al girar cada una de las tres regiones alrededor del eje X; *b*) A y C alrededor del eje Y; *c*) A y C alrededor de la recta horizontal $y = 1$; *d*) B alrededor de la recta vertical $x = 1$ y después alrededor de $x = 2$.

Resp.: *a*) $\frac{41\pi}{105}, \frac{1849\pi}{105}, \frac{71\pi}{105}$; *b*) $\frac{13\pi}{30}, \frac{67\pi}{30}$; *c*) $\frac{31\pi}{70}, \frac{81\pi}{70}$; *d*) $\frac{22\pi}{5}, \frac{53\pi}{30}$

19. Emplee el método de los tubos para hallar el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del eje X los siguientes conjuntos: *a*) $\{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - 2x\}$; *b*) $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \leq y \leq 1 - \sqrt{x}\}$.

Resp.: *a*) $\frac{32}{3}\pi$; *b*) $\frac{\pi}{6}$

20. El sólido W tiene una base en el plano XY que es un disco circular de radio $a > 0$, y toda sección de W por medio de un plano perpendicular al eje X es un triángulo. Halle el volumen de W si el triángulo es: *a*) isósceles, la altura el doble de la base; *b*) isósceles rectángulo, la hipotenusa coincide con la base; *c*) equilátero; *d*) iósceles, la altura es igual al cubo de la base.

Resp.: *a*) $\frac{16}{3}a^3$; *b*) $\frac{4}{3}a^3$; *c*) $\frac{4}{3}\sqrt{3}a^3$; *d*) $\frac{128}{15}a^5$

CAPITULO 13

Aplicación de integrales definidas a la resolución de problemas de física

El concepto físico de trabajo realizado por una fuerza se define, en el caso de una fuerza constante aplicada en la dirección del movimiento y después de haber recorrido una determinada distancia, como producto de la fuerza por la distancia. Las unidades del trabajo son las unidades que se emplean para la fuerza y la distancia. En el caso de una fuerza variable, el trabajo se define de tal manera que sea consistente la definición en el caso de la fuerza constante y además la función fuerza debe verificar los siguientes axiomas:

Axioma 1. *Aditividad.* El trabajo hecho por una fuerza al moverse de a a b más el trabajo hecho al moverse de b a c es igual al trabajo total que la fuerza realiza al moverse de a a c.

Axioma 2. *Monotonía.* Si F_1 y F_2 son dos funciones fuerza y si $F_1 \leq F_2$ sobre el intervalo $[a, b]$, entonces el trabajo T hecho por la fuerza F_1 es menor e igual que el trabajo hecho por la fuerza F_2: $F_1 \leq F_2 \Rightarrow T_1 \leq T_2$.

Definición. Si f es una función continua definida en el intervalo $[a, b]$ con la propiedad de que la fuerza aplicada a la partícula P en el punto $x \in [a, b]$, el trabajo T que hace para mover P de a a b se define como $T = \int_a^b f(x)\, dx$. La función f se llama función fuerza.

En muchos de los problemas de las ciencias físicas y sociales sus soluciones se pueden hallar por aproximaciones de la forma $\sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_j)(x_j - x_{j-1})$. Si las aproximaciones son más exactas a medida que la norma de las particiones se aproxima a cero, es costumbre emplear el límite $\int_a^b f\, dx$ como solución exacta.

El siguiente teorema formaliza lo dicho anteriormente.

Teorema de Darboux. Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum f(\bar{x}_j)(x_j - x_{j-1})$$

$P \in P^*$, siendo P^* el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ y $\bar{x}_j \in [\bar{x}_{j-1}, x_j]$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 13-1 Si para estirar un resorte 1 cm se necesita una fuerza de 1 kgf, ¿qué trabajo habrá que aplicar para estirarlo 6 cm?

Solución. Según la ley de Hooke, la fuerza F que estira el resorte x m es igual a $F = kx$, siendo k una constante del resorte. Si $x = 0{,}01$ m y $F = 1$ kgf, entonces $K = 100$ y, por consiguiente, $F = 100x$. Entonces el trabajo pedido es

$$T = \int_0^{0{,}06} 100x\, dx = 50x^2 \Big|_0^{0{,}06} = 0{,}18 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

Problema 13-2 El trabajo que se necesita para cargar un condensador eléctrico es análogo al del problema anterior en el campo eléctrico. El voltaje $V(q)$ que se necesita para colocar una carga q sobre las placas de un condensador es proporcional a la carga $V(q) = \frac{1}{c}\, q$. $V(q)$ es la diferencia de potencial entre las placas que corresponde a la fuerza $F(x)$. La constante C es la capacitancia del condensador. Determine el trabajo realizado para colocar la carga Q en el condensador.

Solución. El trabajo realizado para cargar el condensador de $q = q_0$ a $q = q_1$ es $T_{q_0}^{q_1}(V) = \int_{q_0}^{q_1} V dV = \int_{q_0}^{q_1} V(q)\, dq$. Entonces el trabajo que hay que realizar para colocar una carga Q en un condensador descargado es

$$T = \int_0^Q V(q)\, dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\, dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Se dice entonces que la energía almacenada en el condensador con carga Q sobre sus placas es

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} V^2(Q) = \frac{1}{2} QV(Q)$$

Problema 13-3 Deduzca la fórmula del trabajo que se necesita para bombear agua a un tanque de h cm de altura si el área de la sección transversal a x cm por debajo de la parte superior es $A(x)$, con A una función continua.

Solución. Vamos a hacer cálculos del trabajo necesario, por exceso y por defecto, suponiendo que el agua se transporta en discos muy delgados. El eje X está dirigido hacia abajo de tal manera que el origen está en la parte superior del tanque y el punto h en la base. Sea P una partición de $[a, b]$.

$$P = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < , \ldots, < x_n = b\}$$

Si T es el trabajo que se hace para bombear el agua, se tiene que

$$\sum_1^n \rho x_{i-1} A(c_i)\Delta x_i \le \rho \le \sum_{i=1}^n \rho x_i A(c_i)\Delta x_i,\ c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Los factores $\rho A(c_i)\Delta x_i$ en las sumas dan el peso del i-ésimo disco de la parte superior, con ρ la densidad del agua, $A(c_i)$ el área seccional media y Δx_i la altura del disco.

Entonces

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^n \rho x_{i-1} A(c_i)\Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^n \rho x_i A(c_i)\Delta x_i = \int_0^h \rho x A(x)\, dx = \rho \int_0^h x A(x)\, dx = \text{trabajo}$$

Problema 13-4 ¿Cuál es el trabajo que hay que hacer para bombear el agua de un recipiente semiesférico de radio r a una altura h, por encima del recipiente?

Solución. La Figura 13-1 muestra las coordenadas y la manera en que se divide el volumen por discos determinados, por planos perpendiculares al eje X, entre $x = 0$ y $x = r$. El disco comprendido entre los puntos x y $x + \Delta x$ es de volumen ΔV, que es aproximadamente $\Delta V \approx \pi y^2 \Delta x = \pi(r^2 - x^2)\Delta x$.

La fuerza F requerida para bombear el agua de este volumen es igual a su peso: $\rho \Delta V \approx \pi\rho(r^2 - x^2)\Delta x$, siendo ρ el peso de un dm^3 de agua. La distancia en la cual actúa esta fuerza es $[h + x, h + x + \Delta x]$; por tanto, el trabajo ΔT realizado para elevar este volumen es

$$\Delta T \approx \pi\rho(r^2 - x^2)(h + x)\Delta x$$

El trabajo total es $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{0}^{r} \pi\rho(r^2 - x^2)(h + x)\Delta x = \int_0^r \pi\rho(h + x)(r^2 - x^2)\,dx = h\rho \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx + \rho \int_0^r \pi x(r^2 - x^2)\,dx = h\rho V + \bar{x}\rho V = \frac{2}{3}\pi r^3 \left(h + \frac{8}{3} r\right)$. En este caso, ρV es el peso del volumen de agua V, y la segunda integral se puede interpretar físicamente como el trabajo requerido para bombear toda el agua del recipiente, desde el nivel $x = 0$ a una distancia h cm.

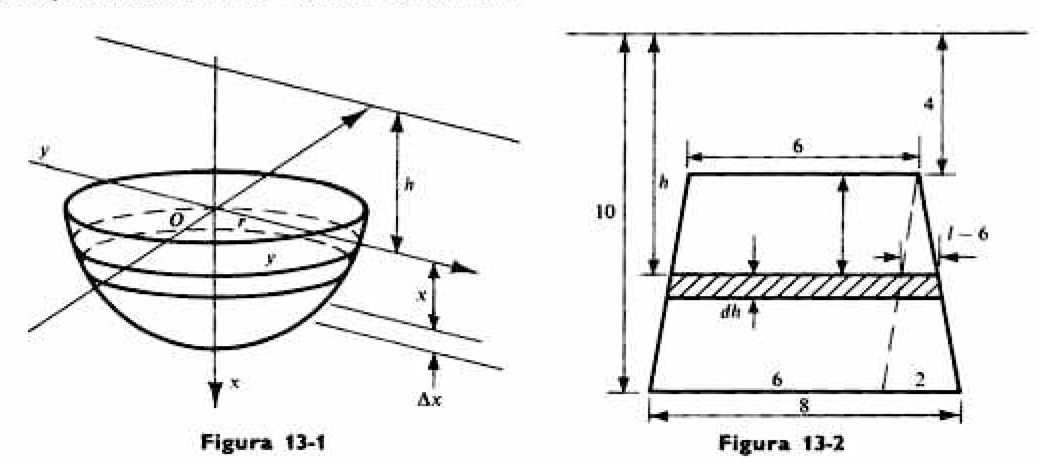


Figura 13-1 **Figura 13-2**

Problema 13-5 Un trapezoide se sumerge verticalmente en el agua con su lado superior a 4 dm por debajo de la superficie y el otro lado a 10 dm. Si la longitud de los dos lados es de 6 dm y 8 dm, respectivamente, halle la fuerza total ejercida sobre la cara del trapezoide.

Solución. La Figura 13-2 muestra que por semejanza de triángulos

$$\frac{l - 6}{2} = \frac{h - 4}{6}, \qquad \therefore \quad l = \frac{h + 14}{3}$$

Entonces la fuerza es

$$F = \int_4^{10} \rho h \left(\frac{h + 14}{3}\right) dh = 300 \text{ kgf}, \ \rho = 1$$

Problema 13-6 El peso de una partícula es k/R^2 lbf, con R la distancia al centro de la Tierra. Halle el trabajo realizado por la partícula desde la superficie de la Tierra ($R = 4000$ millas) a un punto situado a 2000 millas de la superficie.

Solución. $T = \int F ds = \int_{4000}^{6000} (k/R^2)\,dR = -k/R \Big|_{4000}^{6000} = -k(1/6000 - 1/4000)$ millas · lb $= 1/12\,000\ k$ millas · lb $= 5280/12\,000$ klb · pie $= 0{,}44$ klb · pie.

Problema 13-7 Se emplean 100 libras fuerza para alargar un resorte 2 pies. ¿Cuánto trabajo es necesario para alargarlo 3 pies? ¿Cuál es el trabajo realizado para alargarlo de 3 a 5 pies?

Solución. $T = \int_0^3 kx\,dx = k(9/2)$. La constante del resorte se puede hallar cuando $x = 2$, puesto que la función fuerza tiene un valor de 100. Entonces, $k = 50$ y $T = 225$ lb · pie. La respuesta a la segunda pregunta se obtiene de $(k/2)(a^2 - b^2) = 25(25 - 9) = 400$ lb · pie.

Problema 13-8 Un gas se guarda en un cilindro. Suponiendo que la ley de Boyle se verifica, es decir, que si el gas se comprime isotérmicamente y p = presión, v = volumen, $pv = k$, halle el trabajo realizado para comprimir el gas por medio de un pistón móvil en el cilindro de 200 pulg^3 a 20 pulg^3 si el volumen original está a la presión atmosférica (14,7 lb/pulg^2).

Solución. Como $v = hA$, siendo A el área constante de la sección transversal, $F = A \cdot p = A \cdot \dfrac{k}{Ah} = \dfrac{k}{h}$; h varía de $200/A$ a $20/A$; $k = 14{,}7 \times 200$. Entonces

$$T = \int F\,ds = \int_{20/A}^{200/A} F\,dh = k\int_{20/A}^{200/A} \frac{dh}{h} = k \ln h \Big|_{20/A}^{200/A} = k \ln 10 = 2940 \ln 10 \text{ lb} \cdot \text{pulg} = 564 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Problema 13-9 Una cisterna cilíndrica de 10 pies de radio y 20 pies de altura está llena de agua; ¿cuál es el trabajo realizado para subir el agua a la parte superior?

Solución. Se supone que el agua se transporta como discos muy delgados. El volumen de un disco, según la Figura 13-3 es $\pi \times 100 \times \Delta y$ y su peso $62{,}4 \times \pi \times 100 \times \Delta y$. Entonces

$$T = \int_0^{20} (20 - y)62{,}4 \times \pi \times 100 \times dy = 6240\pi\left(20y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{20} = 6240\pi \times 200 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 1\,248\,000\pi \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

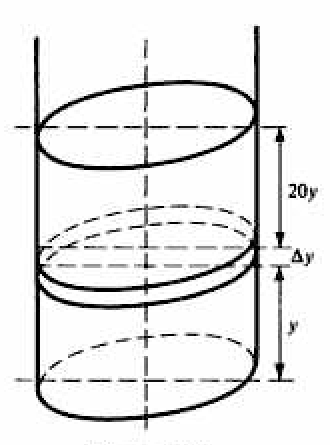


Figura 13-3

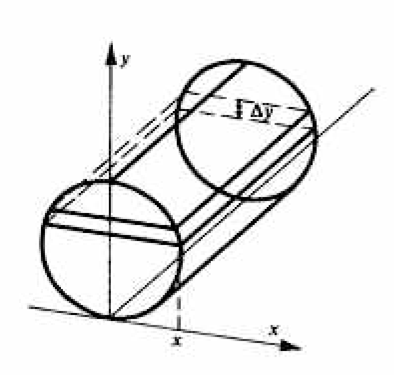


Figura 13-4

Problema 13-10 Un tanque cilíndrico de 10 dm de largo y 4 dm de radio en posición horizontal está lleno de aceite de densidad 1,2 kg/dm^3. Halle el trabajo para bombearlo a la parte superior.

Solución. Se considera el aceite transportado por láminas muy delgadas, según la Figura 13-4, de peso $(1,2)(10)(2x)(\Delta y)$; $x^2 + y^2 - 8y = 0$. Entonces

$$T = 24 \int_0^8 \sqrt{8y - y^2}\, dy = 800 \int_0^8 \sqrt{16 - (y-4)^2}\, dy. \text{ Sea } y - 4 = 4 \operatorname{sen} \theta$$

$$T = 24 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16 \cos^2 \theta \, d\theta = 384 \left| \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 19{,}2\pi \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

Problema 13-11 Suponga que se tiene un tanque cilíndrico de agua de altura h m y de base radio r m. *a*) ¿Cuál es el trabajo necesario para bombear toda el agua a la parte superior? (Vea Fig. 13-5.)

b) Repita el problema anterior si el tanque es cónico, de altura h y radio de la parte superior r m. (Vea Fig. 13-6.)

c) Repita el problema anterior si el tanque es un paraboloide de revolución de altura h m y radio de la parte superior r m. (Vea Fig. 13-7.)

d) Repita el problema anterior si el tanque es un hiperboloide de revolución de 10 dm de alto si el radio de la base es de 2 dm y el de la parte superior $2\sqrt{2}$ dm. (Vea Fig. 13-8.)

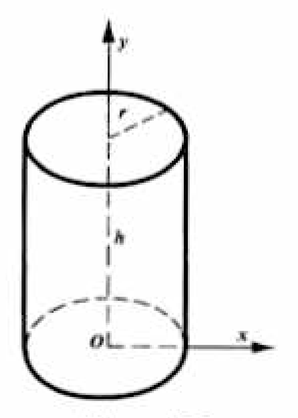


Figura 13-5

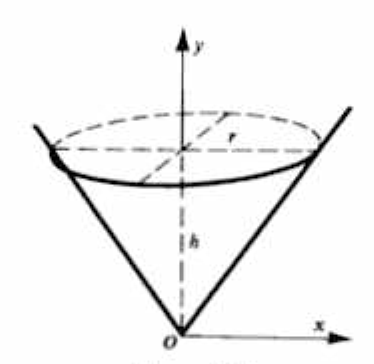


Figura 13-6

Solución. *a*) En este caso tenemos que $g(y) = r$; por tanto,

$$T = \rho\pi \int_0^h (h - y) r^2\, dy = \rho\pi r^2 \int_0^h (h - y)\, dy$$

Calculando la integral se obtiene

$$\left(hy - \frac{y^2}{2} \right)\Big|_0^h = h^2 - \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{2}$$

Entonces $T = \frac{1}{2} \rho\pi r^2 h^2$, que es el trabajo necesario para vaciar el tanque.

b) $g(y) = y/m$, m la pendiente de la recta que genera el cono. Pero $m = h/r$. Entonces $g(y) = (r/h)y$. Al remplazar este valor en la integral que da el trabajo se obtiene $T = \frac{1}{12} \rho\pi r^2 h^2$.

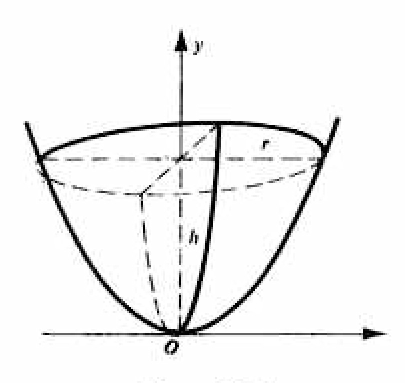


Figura 13-7

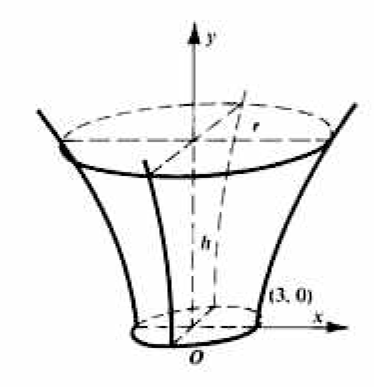


Figura 13-8

c) El grafo que genera el sólido tiene una ecuación de la forma $y = kx^2$ y pasa por el punto (r, h). Entonces $h = kr^2$, $k = h/r^2$ y, finalmente, $x^2 = [g(y)]^2 = y/k = (r^2/h)y$. Remplazando en la integral que da el trabajo se obtiene $T = \frac{1}{6}\rho\pi r^2 h^2$, como el trabajo necesario para vaciar el tanque.

d) En este caso se tiene que $g(y) = (a/b)\sqrt{(y^2 + b^2)}$ si la hipérbola que genera el sólido tiene por ecuación a $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Es necesario determinar las constantes a y b. Ahora, $(2, 0)$ es un vértice I de la hipérbola; entonces $a = 2$ y $(2\sqrt{2}, 10)$ es un punto sobre el grafo. Remplazando x, y y a se obtiene $8/4 - 100/b^2 = 1$. Es decir, $b = 10$. Por tanto, $g(y) = 1/5(y^2 + 100)^{1/2}$. Remplazando esto en la fórmula que da el trabajo se obtiene

$$T = \rho\frac{\pi}{25}\int_0^h (h - y)(y^2 + 100)\,dy = \frac{\rho\pi h^2}{300}(h^2 + 600)$$

Problema 13-12 Halle la fuerza ejercida sobre un triángulo sumergido en el agua, como se muestra en la Figura 13-9, con un vértice tocando la superficie y con una base horizontal de 9 dm y una altura de 4 dm, $\left(F = \int_{h_1}^{h_2} \rho h l\, dh\right)$

Solución. Según la Figura 13-9, $h/l = 4/9$ o $l = (9/4)h$. Entonces

$$F = \rho\int_0^4 h \cdot \frac{9}{4}h \cdot dh = \rho\,\frac{3}{4}h^3\Big|_0^4 = 48 \text{ kgf}$$

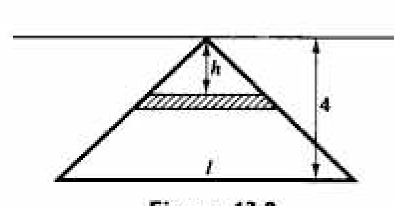


Figura 13-9

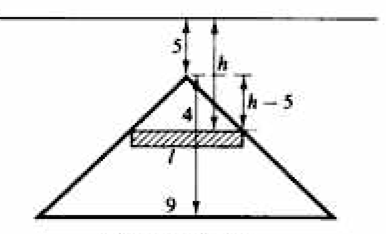


Figura 13-10

Problema 13-13 Halle la fuerza ejercida sobre un triángulo sumergido en el agua, como lo muestra la Figura 13-10, con un vértice a 5 dm por debajo de la superficie, una altura de 4 dm y una base de 9 dm.

Solución. En este caso, según la Figura 13-10, $(h - 5)/l = 4/9$, $l = 9/4 \cdot (h - 5)$. Entonces

$$F = \rho \int_5^9 h \cdot \frac{9}{4}(h - 5)\, dh = \frac{9}{4}\left(\frac{h^3}{3} - \frac{5}{2}h^2\right)\Big|_5^9 = \frac{9}{4}[40{,}5 - (-15{,}9)] = 101{,}52 \text{ kgf}$$

Se eligieron los límites 5 y 9, puesto que h varía de 5 dm a 9 dm y $\rho = 1$.

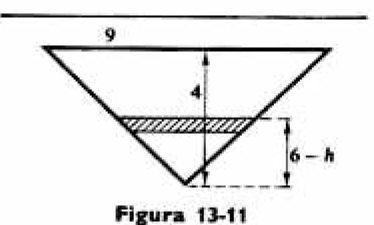


Figura 13-11

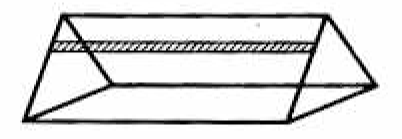
Problema 13-14 Halle la fuerza que el agua ejerce sobre un triángulo sumergido, como lo indica la Figura 13-11, si la altura es 4 dm, la base 9 dm y la profundidad del vértice 6 dm.

Solución. Según la figura, $(6 - h)/l = 4/9$, $l = 9/4(6 - h)$.

Entonces

$$F = \rho \int_2^6 h \cdot \frac{9}{4}(6 - h)\, dh = \frac{9}{4}\left(3h^2 - \frac{h^3}{3}\right)\Big|_2^6 = \frac{9}{4}\left[\left(3 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3}\right) - \left(3 \cdot 2^2 - \frac{2^3}{3}\right)\right] = 60 \text{ kgf}$$

Problema 13-15 Si los extremos de un recipiente son triángulos equiláteros, como lo muestra la Figura 13-12, de lado 2 dm y su largo de 10 dm, halle la fuerza que actúa sobre los lados si se llena de agua.



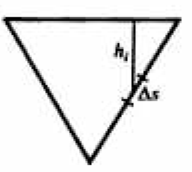


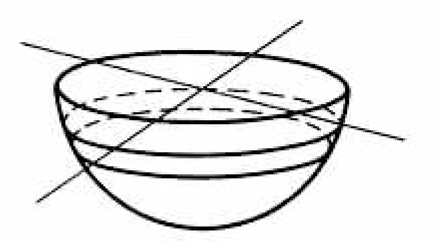
Figura 13-12

Solución. Las bandas son de 10 dm de largo y $\Delta s = \dfrac{2\Delta h}{\sqrt{3}}$.

$$\Delta F = \rho h \cdot 10 \frac{2\Delta h}{\sqrt{3}}$$

$$F = \frac{20}{\sqrt{3}} \rho \int_0^{\sqrt{3}} h\, dh = \frac{20}{\sqrt{3}} \rho \frac{h^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} 3\rho = 10\sqrt{3} = 17{,}1 \text{ kgf}, \; \rho = 1$$

Problema 13-16 Halle la fuerza total que se ejerce sobre un recipiente hemisférico lleno de agua si su radio es de 2 dm. (Vea Fig. 13-13.)



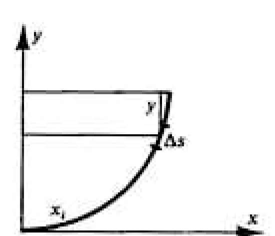


Figura 13-13

Solución. La fuerza que se ejerce sobre el anillo que indica la figura es

$$\Delta F = 2\pi x_i \Delta s \rho y_i;\ x^2 + y^2 = 4;\ ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$F = 2\rho\pi \int_0^2 \sqrt{4 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{4 - y^2}}\right)^2}\, y\, dy =$$

$$= 2\rho\pi \int_0^2 \sqrt{4 - y^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - y^2}}\, y\, dy = 2\pi\rho y^2 \Big|_0^2 = 8\pi\rho \text{ kgf} = 8\pi \text{ kgf};\ \rho = 1$$

Problema 13-17 Una represa vertical tiene la forma de un trapezoide de 30 m de largo en su parte superior, 10 m en la parte inferior y 6 m de profundidad. Halle la fuerza que actúa sobre ella. (Vea Fig. 13-14.)

Solución. Según la Figura 13-14, $\frac{a}{10} = \frac{a + 6}{30} \Rightarrow a = 3$. Empleando la semejanza de triángulos se tiene que $9/30 = \frac{9 - h}{l}$. Entonces

$$F = \rho \int_0^6 lh\, dh = \rho \int_0^6 \frac{10}{3}(9 - h)h\, dh = \frac{10}{3}\left(4{,}5h^2 - \frac{h^3}{3}\right)\Big|_0^6 = 1$$

$$= \frac{10}{3}\left(4{,}5 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3}\right) = 213{,}33 \text{ kgf},\ \rho = 1$$

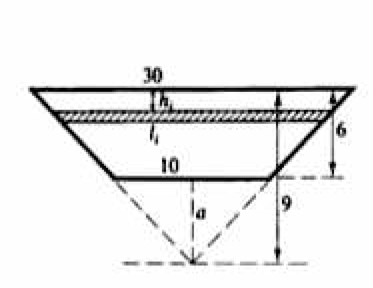


Figura 13-14

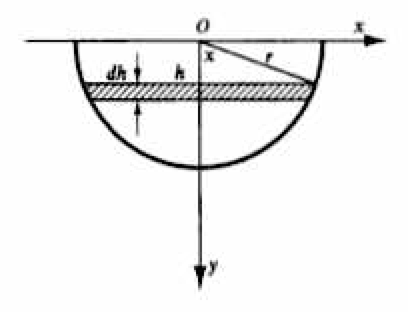


Figura 13-15

Problema 13-18 Halle la presión que soporta un semicírculo de radio r, sumergido verticalmente en agua, de tal forma que su diámetro coincide con la superficie libre de aquélla. (Vea Fig. 13-15.)

Solución. Dividamos la superficie del semicírculo en elementos, fajas, paralelas a la superficie del agua. El área de uno de estos elementos, situado a la distancia h de la superficie del agua, es igual a $dS = 2x\, dh = 2\sqrt{r^2 - h^2}\, dh$. La presión que soporta este elemento es igual a $dP = \rho h\, ds = 2\rho h\sqrt{r^2 - h^2}\, dh$, siendo ρ el peso específico del agua, igual a la unidad. Entonces la presión total es

$$P = 2\int_0^r h\sqrt{r^2 - h^2}\, dh = -\frac{2}{3}(r^2 - h^2)^{3/2}\Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La fuerza gravitacional que actúa sobre una masa m_1 a una distancia r de una masa m_2 es una atracción que actúa a lo largo de la recta que las une. La magnitud de la fuerza está dada por $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, siendo k la constante de gravitación universal. Si a $r = 46{,}4 \times 10^6$ m, $F = 15$kg, ¿qué trabajo en kgf · m se necesita para mover m_1 desde:

a) $r = 6{,}4 \times 10^6$ m (radio de la Tierra) hasta un punto situado a $r = 7{,}4 \times 10^6$ m.
b) 100 m cuando inicialmente $r = 6{,}4 \times 10^6$ m.
c) ¿En cuál de los casos anteriores se puede considerar el campo gravitacional constante?

Resp.: $15r_0/r(r - r_0)$ kgf · m

2. Calcule el trabajo necesario para sacar, por el orificio superior, el aceite contenido en una cisterna de forma cilíndrica, con el eje horizontal, si el peso específico del aceite es ρ, la longitud de la cisterna h y el radio de la base r.

Resp.: $T = \rho\pi r^3 h$

3. ¿Qué trabajo hay que realizar para levantar un cuerpo de masa m de la superficie de la Tierra, cuyo radio es r, a una altura h? ¿A qué será igual este trabajo si hay que lanzar el cuerpo al infinito?

Resp.: *Indicación.* La fuerza que actúa sobre el cuerpo de masa m es igual a $F = k\dfrac{mM}{r^2}$, donde r es la distancia al centro de la Tierra. Como para $r = R$, $F = mg$, resulta $kM = gR^2$. Entonces el trabajo que se busca tendrá la forma $T = \int_R^{r+h} k\dfrac{mM}{r^2}\,dr = kmM[1/R - 1/(R + h)] = mgh/(1 + h/R)$. Si $h = \infty$, entonces $T = mgR$.

4. Dos cargas eléctricas $e_0 = 100$ u.e.s. y $e_2 = 200$ u.e.s. se encuentran en el eje X en los puntos $x = 0$ y $x = 1$ cm, respectivamente. ¿Qué trabajo se realizará si la segunda carga se traslada al punto $x_2 = 10$ cm?

Resp.: *Indicación.* La fuerza de acción mutua de las cargas será $F = \dfrac{l_0 l_1}{x^2}$ dinas. Por consiguiente, el trabajo necesario para trasladar la carga e_1 desde el punto x_1 al punto x_2 será

$$T = e_0 e_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = l_0 l_1 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = 1{,}8 \cdot 10^4 \text{ ergios}$$

5. Un cilindro con un émbolo móvil, de diámetro $d = 20$ cm y de longitud $1 = 80$ cm, está lleno de vapor a presión de $p = 10$ kgf/cm^2. ¿Qué trabajo hace falta realizar para disminuir el volumen del vapor dos veces si la temperatura es constante?

Resp.: *Indicación.* Para el proceso isotérmico, $pv = p_0 v_0$. El trabajo realizado en la expansión del gas desde el volumen v_0 hasta el volumen v_1 es igual a $T = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv = p_0 v_0 \ln\dfrac{v_1}{v_0} = 800\pi \ln 2$ kgf · m.

6. Determine el trabajo realizado en la expansión adiabática del aire, hasta ocupar un volumen $V_1 = 10$ m^3, si el volumen inicial es $V_0 = 1$ m^3 y la presión $p_0 = 1$ kgf/cm^2.

Resp.: *Indicación.* Para el proceso adiabático es válida la ley de Poisson, $pv^k = p_0 v_0^k$, donde $k \approx 1{,}4$. De donde $T = \int_{v_0}^{v_1} \dfrac{p_0 v_0^k}{v^k}\,dv = \dfrac{p_0 v_0}{k-1}\left[1 - \left(\dfrac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}\right] = 15\,000$ kgf · m.

7. ¿Qué trabajo es necesario realizar para detener una bola de hierro de radio $r = 2$ m que gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular $\omega = 1000$ vueltas por minuto? El peso específico del hierro es $\rho = 7{,}8$ gf/cm^3.

Resp.: *Indicación.* La cantidad de trabajo necesario es igual a la reserva de energía cinética, $K = M/5r^2\omega^2 = 2{,}3 \cdot 10^8$ kgf · m.

8. Un triángulo de base b y altura h está sumergido verticalmente en agua, con el vértice hacia abajo, de forma que su base coincide con la superficie del agua. Halle la presión que el agua ejerce sobre él.

Resp.: $p = \dfrac{bh^2}{6}$

9. Una presa vertical tiene la forma de un trapecio. Calcule la presión total del agua sobre dicha presa sabiendo que la base superior tiene $a = 70$ m, la base inferior $b = 50$ m y su altura $h = 20$ m.

Resp.: $P = \dfrac{(a + 2b)h^2}{6} \approx 11{,}3 \cdot 10^3$ ton

10. Halle la presión que ejerce un líquido, cuyo peso específico es ρ, sobre una elipse vertical, de ejes $2a$ y $2b$, cuyo centro está sumergido hasta una profundidad h. El eje mayor $2a$ de la elipse es paralelo a la superficie del líquido ($h \geq b$).

Resp.: $P = ab\rho\pi h$

11. Halle la presión que ejerce el agua sobre un cono cilíndrico vertical, con radio de la base r y altura h, sumergido en ella con el vértice hacia abajo, de forma que la base se encuentra al nivel del agua.

Resp.: $P = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

12. Un hombre tiene una bomba que puede realizar un trabajo máximo de 31 250 lb · pie por hora.

a) Quiere construir un tanque cilíndrico de 10 pies de altura. ¿Cuál es el radio de la base del tanque máximo que se puede construir para que quede vacío al cabo de una hora?

b) Desea construir un tanque cónico con un radio de 6 pies en la parte superior. ¿A qué altura puede construir el tanque para poderlo vaciar en una hora?

Resp.: *a*) $\sqrt{10/\pi}$ pies; *b*) $\sqrt{500/3\pi}$ pies

13. Desarrolle una fórmula que le dé el trabajo que hay que realizar para vaciar un tanque lleno de agua, bombeándola a la parte superior, si el tanque es: *a*) un hemisferio de radio r m; *b*) una pirámide de base cuadrada s m y altura h m; *c*) un hiperboloide de revolución de altura h m, radio de la base circular s m y radio circular de la parte superior $s\sqrt{2}$ m.

Resp.: *a*) $\dfrac{\pi r^4}{4}$; *b*) $\dfrac{s^2h^2}{4}$; *c*) $\dfrac{7}{12}\pi s^2 h^2$

14. Una fuerza de 5 kgf alarga un resorte a partir de su posición original en 7 cm a 10 cm. ¿Qué trabajo se realizó para alargar el resorte de su posición original a una longitud de 15 cm?

Resp.: $53\frac{1}{3}$ kgf · cm

15. Un cable cuelga en un pozo de 100 m de profundidad y pesa 5 kgf por metro, y de la parte inferior tiene adherido un peso de 200 kgf. Halle el trabajo total realizado para subir el cable con el peso a la boca del pozo.

Resp.: 45 000 kgf · m

CAPITULO 14

Longitud de arco

Sea C una curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$C \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} t \in [a,b] \tag{14-1}$$

Sea $R(t) = [f(t), g(t)]$. $R(t)$ es el punto sobre la curva correspondiente al parámetro t.

Para cada partición P de $[a,b]$, sea

$$L_P = \sum_{1}^{n} |R(t_i) - R(t_{i-1})|; \quad |R(t_i) - R(t_{i-1})| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$

El número L_P es la longitud de la poligonal que une los puntos $R(t_0) = R(a), \ldots, R(t_n) = R(b)$, de la curva C. La definición de la longitud de la curva C se basa en dos ideas:

1. Una recta es la distancia mínima entre dos puntos.
2. Para particiones P lo suficientemente finas de $[a,b]$ debemos poder aproximar la longitud de la curva C tanto como se quiera, por medio de la longitud L_P, de la aproximación poligonal de la curva. Así, si L es la longitud de C, $L_P \leq L$ para todas las particiones P de $[a,b]$.

Definición. La curva C definida por (14-1) se dice rectificable si $\{L_P : P \in P^*\}$ tiene un extremo superior y P^* es el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$. Si C es rectificable, se define la longitud L de C como $L = \sup \{L_P : P \in P^*\}$.

Si f y g tienen derivadas en todos los puntos de $[a,b]$, se dice que la curva C es suave.

Lema. Si P_1 es un refinamiento de P, entonces $L_P \leq L_{P_1}$.

Demostración. Es consecuencia de la desigualdad triangular. Sea α_k el primer punto de P_1 que no está en P. Entonces, para algún i, $t_{i-1} < \alpha_k < t_i$, y

$$|R(t_i) - R(t_{i-1})| = |R(t_i) - R(\alpha_k) + R(\alpha_k) - R(t_{i-1})| \leq$$
$$\leq |R(t_i) - R(\alpha_k)| + |R(\alpha_k) - R(t_{i-1})|$$

En un número finito de pasos se pueden agregar todos los puntos de P_1 a P y obtener $L_P \leq L_{P_1}$.

Teorema 1. Si f y g tienen derivadas continuas sobre $[a,b]$, entonces la curva C definida por (14-1) es rectificable y $L = \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt$.

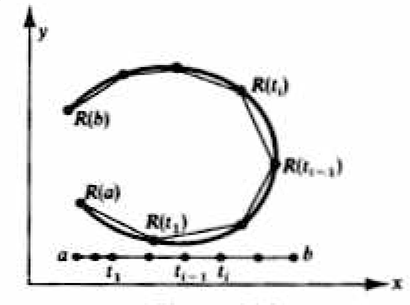


Figura 14-1

Demostración. Según el teorema del valor medio para derivadas, existen $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i')(t_i - t_{i-1})$ y $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(t_i'')(t_i - t_{i-1})$ para algún $t_i', t_i'' \in]t_{i-1}, t_i[$. Por tanto,

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} |R(t_i) - R(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i')]^2 + [g'(t_i'')]^2 (t_i - t_{i-1})^2}$$

Como f' y g' son continuas sobre $[a,b]$, entonces son acotadas sobre $[a,b]$. Sea $|f'(t)| \leq K$ y $|g'(t)| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces $L_P \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{K^2 + M^2}(t_i - t_{i-1}) = (b-a)\sqrt{K^2 + M^2}$ para cada partición P de $[a,b]$. Entonces $\{L_P : P \in P^*\}$ es mayorada y, por tanto, C es rectificable.

Falta mostrar que $L = \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt$.

Según el Teorema 2, sabemos que $\lim_{\|P\| \to 0} L_P = \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow \left| L_P - \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt \right| < \varepsilon$.

Como $L = \sup \{L_P : P \in P^*\}$, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_1 de $[a,b]$ tal que $0 \leq L - L_{P_1} < \varepsilon$. Elija P, con $|P| < \delta$ y sea $P = P_1 \cup P_2$. Como P_2 es un refinamiento de P, $|P_2| \leq |P| < \delta$, entonces $\left| L_{P_2} - \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt \right| < \varepsilon$ y, según el lema, como P_2 es un refinamiento de P_1, $0 \leq L_* - L_{P_2} \leq L - L_{P_1} < \varepsilon$. Por tanto,

$$\left| L - \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt \right| \leq |L - L_{P_2}| + \left| L_{P_2} - \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt \right| < 2\varepsilon$$

Como es válida para cada $\varepsilon > 0$, entonces $L = \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt$.

Nota. Si C es $\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = f(x) \end{array} \right.$, $x \in [a,b]$, entonces $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\, dt$.

Area de una superficie de revolución

Definición. Sea C una curva suave definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, g no negativa en el intervalo $[a,b]$, y sea S el conjunto que se obtiene al hacer girar a C alrededor del eje X. Entonces se dice que S es una superficie de revolución de área $A(S)$:

$$A(S) = 2\pi \int_a^b g(t) ds(t) = 2\pi \int_a^b g(t) \frac{ds}{dt}\, dt = 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \qquad (14\text{-}2)$$

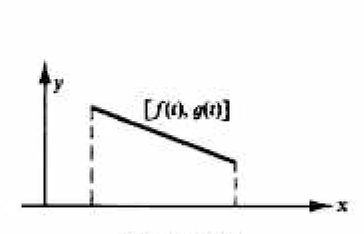


Figura 14-2

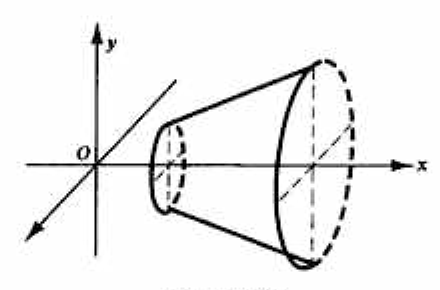


Figura 14-3

En particular, si el parámetro es la variable x, con C dada por $y = g(x)$, entonces

$$A(S) = 2\pi \int_a^b g(x)\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx \tag{14-3}$$

y si el parámetro es y, con C dada por $x = f(y)$, entonces

$$A(S) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{[f'(y)]^2 + 1}\, dy \tag{14-4}$$

Se tienen fórmulas similares a (14-2)-(14-4), que dan el área de la superficie de revolución cuando C se hace girar alrededor del eje Y.

$$2\pi \int_a^b f(t)\dot{d}s(t) = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \tag{14-5}$$

$$2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx \tag{14-6}$$

$$2\pi \int_a^b f(y)\sqrt{[f'(y)]^2 + 1}\, dy \tag{14-7}$$

Las integrales como límites de sumas

Existen muchas aplicaciones donde es importante reconocer que los límites de determinadas sumas son integrales definidas.

Hay situaciones geométricas y físicas que no admiten aproximaciones superiores e inferiores de manera clara. Vamos a traducir el concepto de integral definida a otro que emplee sumas de productos de valores arbitrarios de la función, por el producto de las longitudes de los subintervalos correspondientes.

Definición. Sea f: $[a, b] \to \mathbf{R}$, f acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y $c_0, c_1, \ldots, c_n$ una sucesión de puntos con $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$. Definimos la suma como:

$$S(f, P, \{x_i'\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$$

Ahora se va a trabajar con la norma de una partición, $\|P\|$, que se define como la longitud del subintervalo máximo de P, en vez de refinamiento de una partición. Este tipo de sumas no siempre permite determinar a qué proximidad está la suma de la integral definida. Con el proceso de sumas por exceso y por defecto, siempre se puede acotar el error que se comete.

Teorema 2. Sean $f, g: [a,b] \to \mathbf{R}$, f y g continuas. Entonces:

1. $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S(f, P, \{x_i'\}) = \lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$
2. $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S(fg, P, \{x_i'\}, \{x_i''\}) = \lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')g(x_i'')\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$
3. $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S(\sqrt{f^2 + g^2}, P, \{x_i'\}, \{x_i''\}) = \lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f^2(x_i') + g^2(x_i'')}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{f^2 + g^2}\, dx.$

Demostración 1. Para cada partición P, elija $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$I(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}) \leq S(f, P)$$

como f es continua sobre $[a,b]$, entonces f es integrable sobre $[a,b]$ e $I(f, P) \leq \int_a^b f \leq S(f, P)$.

Por tanto, $\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}) \le S(f,P) - I(f,P)$ y

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \le S(f,P) - I(f,P)$$

Entonces $0 \le \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}) \right| \le S(f,P) - I(f,P) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$

Por tanto, $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx.$

Demostración 2. Como f es continua sobre $[a,b]$, es acotada sobre $[a,b]$. Entonces para algún $k > 0$, $|f(x)| < k$ para todo $x \in [a,b]$. Como g es uniformemente continua, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x'' - x'| < \delta$, lo cual implica que $|g(x'') - g(x')| < \frac{\varepsilon}{k}$ para todo $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$.

Por tanto, $0 < x_i - x_{i-1} < \delta$ implica que $|f(x')g(x') - f(x')g(x'')| = |f(x')|\,|g(x'') - g(x')| < < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$

La continuidad de f y g sobre $[a,b]$ implican que fg es continua sobre $[a,b]$, entonces

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')g(x_i'')\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Demostración 3. g continua sobre $[a,b]$ implica que g^2 es continua sobre $[a,b]$ y, por tanto, uniformemente continua sobre $[a,b]$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |g^2(x'') - g^2(x')| < \varepsilon^2$ para todo $x', x'' \in [a,b]$.

Además necesitamos la desigualdad $||y| - |z|| \le \sqrt{|y^2 - z^2|}$.

Como $y^2 - 2|y||z| + z^2 \le y^2 - 2z^2 + z^2 = y^2 - z^2$, si $|y| \ge |z|$ y $y^2 - 2|y||z| + + z^2 \le y^2 - 2y^2 + z^2 = z^2 - y^2$ si $|z| > |y| \Rightarrow (|y| - |z|)^2 \le |y^2 - z^2| \Rightarrow ||y| - |z|| \le \le \sqrt{|y^2 - z^2|}$.

Empleando la desigualdad obtenemos que

$$\left|\sqrt{f^2(x') + g^2(x'')} - \sqrt{f^2(x') + g^2(x')}\right| \le \sqrt{|g^2(x'') - g^2(x')|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

cuando $0 < x_i - x_{i-1} < \delta$.

Como $\sqrt{x}$ es continua sobre $[0, +\infty[$ y f y g continuas sobre $[a,b]$, entonces

$$\sqrt{x} \circ (f^2 + g^2) = \sqrt{f^2 + g^2}$$

es continua sobre $[a,b]$. Por consiguiente, $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f^2(x_i') + g^2(x_i'')}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{f^2 + g^2}\,dx.$

Arcos y curvas en el plano

Definición. Un arco en el plano es la imagen del intervalo $a \le t \le b$ por una aplicación de la forma

$$x = f(t),\ y = g(t) \tag{14-8}$$

con f y g continuas sobre $[a,b]$. La variable t se llama parámetro; la representación de (14-8) es una parametrización del arco, y las funciones f y g se llaman las funciones parámetro. Un arco es una curva cerrada para una determinada parametrización si, y solamente si, las imágenes de los puntos extremos a y b del intervalo son iguales: $f(a) = f(b)$ y $g(a) = g(b)$. Un arco es simple para una determinada parametrización si, y solamente si, la aplicación es biyectiva. Un arco

es una curva simple cerrada para una determinada parametrización si, y solamente si, los puntos extremos del intervalo de definición forman el único par de puntos distintos que tienen la misma imagen. (Vea Fig. 14-4.)

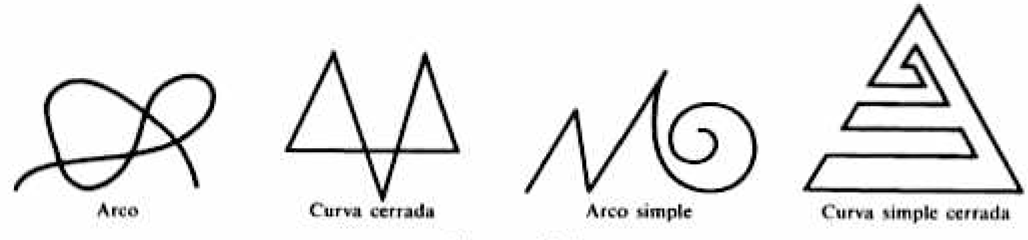


Figura 14-4

Nota 1. Un arco puede tener diferentes parametrizaciones. Por ejemplo, el segmento de recta que une los puntos (1, 0) y (0, 1) tiene las siguientes parametrizaciones:

a) $x = t,\ y = 1 - t,\ 0 \le t \le 1$; *b)* $x = 3 - t,\ y = -2 + t,\ 2 \le t \le 3$; *c)* $x = \operatorname{sen}^2 t$, $y = \cos^2 t,\ 0 \le t \le 8\pi$, etc.

Nota 2. Un arco puede ser curva cerrada en una parametrización y no ser una curva cerrada en otra parametrización. Por ejemplo, el segmento que une los puntos (1, 0) y (0, 1) es una curva cerrada en la parametrización *c)* y no es una curva encerrada en *a)*.

Nota 3. Un arco puede ser simple en una parametrización como en la del caso *a)* y no ser simple en otra parametrización como en el caso *c)*.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 14-1 Las ecuaciones paramétricas del círculo son $x = a\cos\theta,\ y = a \operatorname{sen}\theta \cdot$ $\cdot\ \theta \in [0, 2\pi]$. Halle su longitud.

Solución. I. $x' = -a \operatorname{sen}\theta,\ y' = +a\cos\theta;\ (x')^2 + (y')^2 = a^2$. Entonces $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} = 2\pi a$.

II. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ dy/dx = -x/\sqrt{a^2 + x^2}$ y $1 + (y')^2 = 1 + \dfrac{x^2}{a^2 - x^2} = \dfrac{a^2}{a^2 - x^2}$.

La derivada no es continua en $x = \pm a$. Pero se puede mostrar que la integral es impropia y que $\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_{-a}^{a} \dfrac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ converge y es la longitud de un semicírculo.

Problema 14-2 Determine la longitud de la curva $y^3 = x^2$ desde $(-1, 1)$ a $(2\sqrt{2}, 2)$.

Solución. De la ecuación $y = x^{2/3}$ se obtiene $y' = 2/3x^{-1/3}$ y $L = \int_{-1}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-2/3}}\, dx$. Es una integral impropia, lo cual sugiere que se obtenga una mejor representación analítica de C. Sea $x = t^3$, entonces $y = t^2$, es decir, las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = t^3$ y $y = t^2$, $t \in]-\infty, \infty[$. El valor $t = -1$ corresponde al punto $(-1, 1)$ y $t = \sqrt{2}$ corresponde a $(2\sqrt{2}, 2)$. Entonces

$$L = \int_{-1}^{\sqrt{2}} \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{9t^4 + 4t^2} + \int_{1}^{\sqrt{2}} \sqrt{9t^4 + 4t^2} = 2\int_0^1 \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt$$

por ser la integral una función par. Para $t \ge 0$, $\sqrt{9t^4 + 4t^2} = t\sqrt{9t^2 + 4} = \frac{1}{18}\sqrt{9t^2 + 4}\, D_t(9t^2 + 4)$. Entonces $L = \frac{2}{27}(9t^2 + 4)^{3/2}\Big|_0^1 + \frac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{27}(13^{3/2} + 22^{3/2} - 16)$.

Problema 14-3 Las ecuaciones paremétricas de la hipocicloide son $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$. Halle la longitud total de la curva.

Solución. Cuando θ varía de 0 a $\pi/2$, P recorre la parte de la curva correspondiente al primer cuadrante. También $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = a^{2/3}$. Como la curva es simétrica, entonces

$$L = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{dx^2 + dy^2}. \text{ Como } \frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = 3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta$$

Por tanto.

$$L = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3a\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta)^2 + (3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta)^2}\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}3a\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = 12a\left(\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = 6a$$

Problema 14-4 Verifique que $\int_a^b\sqrt{(f')^2 + (g')^2}\,dt$ da la longitud correcta de un segmento de recta.

Solución. La recta que une los puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) tiene por ecuaciones paramétricas a $x = a_1(1-t) + a_2t$, $y = b_1(1-t) + b_2t$, $0 \le t \le 1$, que es de longitud $l = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$. También

$$l = \int_0^1\sqrt{\left(\frac{d}{dt}[a_1(1-t) + a_2t]\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}[b_1(1-t) + b_2t]\right)^2}\,dt = \int_0^1\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}\,dt =$$
$$= \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

Problema 14-5 Halle la longitud de la curva $x = t^2 + 2t + 3$, $y = t^2 - 2t + 1$, $0 \le t \le 1$.

Solución. $x'(t) = 2t + 2$; $y'(t) = 2t - 2$; $[x'(t)]^2 = 4t^2 + 8t + 4$; $[y'(t)]^2 = 4t^2 - 8t + 4$ y $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 8t^2 + 8 = 8(1 + t^2)$. Entonces la longitud de arco es

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^1(1 + t^2)^{1/2}\,dt = 2 + \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})$$

Problema 14-6 Halle la longitud de un arco de la cicloide $y = a(1 - \cos\theta)$, $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$.

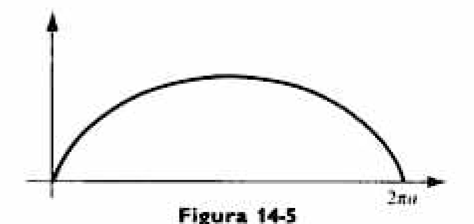


Figura 14-5

Solución. $dx/d\theta = a(1 - \cos\theta)$, $dy/d\theta = a\,\text{sen}\,\theta$ y

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2\,\text{sen}^2\theta}\,d\theta = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2\cos\theta}\,d\theta = 2a\int_0^{2\pi}\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta = -4a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

Observe que si se quiere hallar la longitud de dos arcos, límites 0 y 4π, se debe tener cuidado en hacer negativo a $\text{sen}\,\theta/2$ entre 2π y 4π. De esta manera, $\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$ es positivo sobre el dominio de integración.

Problema 14-7 Halle la longitud de la curva $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Solución. $L = \int_0^1\sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_0^1\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$. Sea $x = 1/2\,\text{tg}\,\theta$; entonces

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\text{arc tg}\,2}\sqrt{1 + \text{tg}^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\text{arc tg}\,2}\sec^3\theta\,d\theta = \left(\frac{1}{4}\sec\theta\,\text{tg}\,\theta + \frac{1}{4}\ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta|\right)\Big|_0^{\text{arc tg}\,2} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{5}\cdot 2 + \frac{1}{4}\ln|\sqrt{5} + 2| = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln|\sqrt{5} + 2| \qquad (\text{arc tg}\,2 = \text{arc sec}\,\sqrt{5})$$

Problema 14-8 Halle la longitud de la curva $y = \ln \sec x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/6$.

Solución. $y' = \operatorname{tg} x$; entonces

$$L = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/6} \sec x\, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big|_0^{\pi/6} = \ln\left|\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \ln\sqrt{3}$$

Problema 14-9 Halle la longitud de la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$, comprendida entre los puntos en los cuales corta los dos ejes.

Solución. $y' = -\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $L = \displaystyle\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx$. Sea $y = a\cos^4\theta$; entonces

$$L = -\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1 + \frac{a \operatorname{sen}^4\theta}{a\cos^4\theta}} \cdot 4a\cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -4a\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta} \cdot \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= -2a\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)^2} \cdot \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$$

Haciendo $\cos 2\theta = \operatorname{tg} z$; $-2\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta = \sec^2 z\, dz$; $\theta = 0$; $z = \pi/4$; $\theta = \pi/2$, $z = -\pi/4$. De donde

$$L = \frac{\sqrt{2}}{2} a\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}\, \sec^2 z\, dz = \frac{\sqrt{2}}{2} a\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^3 z\, dz = \frac{\sqrt{2}a}{4}(\sec z \operatorname{tg} z + \ln|\sec z + \operatorname{tg} z|)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{4}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| + 2\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}a}{4}\,(\ln|\sqrt{2}+1|^2 + 2\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}a}{2}\,(\ln[\sqrt{2}+1] + \sqrt{2})$$

Problema 14-10 Determine la longitud del arco de parábola $y = 2px^2$ entre el vértice y el punto en el cual la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

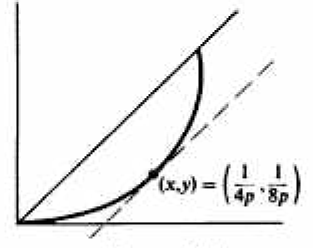


Figura 14-6

Solución. La tangente tiene pendiente 1 en el punto (x, y).

$$dy/dx = 1 = 4px,\ x = 1/4p,\ y = 2p\frac{1}{16p^2} = 1/8p$$

La longitud es $L = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4p}} \sqrt{1 + 16p^2x^2}\, dx$.

Haciendo el cambio $4px = \operatorname{senh} t$, $x = \operatorname{senh} t/4p \Rightarrow dx = \cosh t/4p \cdot dt$. Entonces

$$L = \int_0^{\operatorname{arg\,senh} 1} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 t}\, \frac{\cosh t}{4p}\, dt = \frac{1}{4p}\int_0^{\operatorname{arg\,senh} 1} \cosh^2 t\, dt = \frac{1}{4p}\int_0^{\operatorname{arg\,senh} 1} \frac{\cosh 2t + 1}{2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{8p}\left[\frac{1}{2}\operatorname{senh} 2t + t\right]_0^{\operatorname{arg\,senh} 1} = \frac{1}{8p}\left[\frac{1}{2}\operatorname{senh} 2[\operatorname{Arg\,senh} 1] + \operatorname{Arg\,senh} 1\right] =$$

$$= \frac{1}{8p}\left[\frac{1}{2}2\sqrt{2} + \operatorname{Arg\,senh} 1\right] = \frac{\sqrt{2}}{8p} + \frac{1}{8p}\ln(1 + \sqrt{2}).$$ Porque $\operatorname{arg\,senh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2})$

Problema 14-11 Determine la longitud de la curva $y = 1 + \ln x$ entre los puntos 1 y 2.

Solución. $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx \Rightarrow s = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^2+1}} =$

$$= \int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = (\sqrt{x^2+1})\Big|_1^2 + \int_1^{1/2} \frac{\frac{-t}{t^2}\,dt}{\sqrt{1/t^2+1}} = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \int_{1/2}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + [\text{arg senh } t]\Big|_{1/2}^1 = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \text{arg senh } 1 - \text{arg senh } \frac{1}{2} =$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Problema 14-12 Determine la longitud de $x = 2 \text{ sen } x$ entre 0 y π.

Solución. $s = \int_0^\pi \sqrt{1 + 4\cos^2 x}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4(1 - \text{sen}^2 x)}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{5 - 4\,\text{sen}^2 x}\,dx =$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{5 - 4\,\text{sen}^2 x} = 2\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \text{sen}^2 x}\,dx \approx 5{,}2$$

se trata de una integral elíptica, del segundo tipo de Legendre. Consulte el cálculo de este tipo de integrales en el Capítulo 21.

Problema 14-13 Pruebe que el grafo C de la función continua

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\cos\frac{\pi}{x}, & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es una curva rectificable.

Solución. Inscriba una curva poligonal $P_0, P_1, \ldots, P_n$ en C de longitud

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} > \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Elija a $x_0 = 0$, $x_1 = 1/n$, $x_2 = \frac{1}{n-1}, \ldots, x_{n-1} = \frac{1}{2}$, $x_n = 1$. Entonces $f(x_0) = 0$ y

$$f(x_i) = \sqrt{x_i}\cos\frac{\pi}{x_i} = \frac{1}{\sqrt{n-i+1}}\cos(n - i + 1)\pi = (-1)^{n-i+1}\frac{1}{\sqrt{n-i+1}}$$

Si $i \ne 0 \Rightarrow |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \frac{1}{\sqrt{n-i+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-i+2}}$, $i \ne 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= 1 + 2\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + 2\frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| > \sqrt{n}$$

Agregando otros puntos de subdivisión, $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+p}$ se puede hacer $\lambda = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_{n+p} - x_{n+p-1}\}$, tan pequeño como se quiera, y a la vez

$$\sum_{i=1}^{n+p} |P_{i-1}P_i| \ge \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| > \sqrt{n}$$

Como al agregar vértices no disminuye la longitud de la curva poligonal inscrita en C, entonces, siendo n arbitrario, se puede hacer primer miembro de la acotación tan grande como se quiera, con λ menor que cualquier $\varepsilon > 0$ dado. Es decir, la longitud de la curva poligonal inscrita no se aproxima a un límite finito cuando $\lambda \to 0$. Por tanto, C no es rectificable.

Problema 14-14. Un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ se hace girar alrededor del eje X. Halle el área generada.

Solución. $\dfrac{dx}{d\theta} = (1 - \cos\theta)$; $\dfrac{dy}{d\theta} = a \operatorname{sen}\theta$.

$$ds = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = a\sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta.$$

$$S = 2\pi\int y\, ds = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)a\sqrt{2-2\cos\theta}\, d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^{3/2}\, d\theta =$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{3}\, d\theta = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= 8\pi a^2\left(-2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{64\pi a^2}{3}$$

Problema 14-15 Halle el área generada cuando $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se hace girar alrededor del eje Y. Use las ecuaciones paramétricas $x = a\cos\theta$, $y = b\operatorname{sen}\theta$.

Solución. $\dfrac{dx}{d\theta} = -a\operatorname{sen}\theta$; $\dfrac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$; $ds = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta$, $r = x = a\cos\theta$. Entonces

$A = 2\pi\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos\theta\sqrt{(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\theta + b^2}\, d\theta$. Sea $\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{sen}\theta = b\operatorname{tg} z \Rightarrow \sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\, d\theta = b\sec^2 z\, dz$. Si $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$; $z = \operatorname{arc\,tg} -\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; $z = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

$$A = \frac{2\pi ab}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_{\operatorname{arc\,tg} -\sqrt{a^2-b^2}/b}^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{a^2-b^2}/b}\sec^2 z\sqrt{b^2\operatorname{tg}^2 z + b^2}\, dz =$$

$$= \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{1}{2}\sec z\operatorname{tg} z + \frac{1}{2}\ln|\sec z + \operatorname{tg} z|\right)\Big|_{\operatorname{arc\,tg} -\sqrt{a^2-b^2}/b}^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{a^2-b^2}/b}$$

La Figura 14-7 muestra que $\operatorname{arc\,tg} \pm\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = \operatorname{arc\,sec}\dfrac{a}{b}$.

Figura 14-7

$$A = \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{2a}{b}\cdot\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} + \ln\left|\frac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}}{\dfrac{a}{b} - \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}}\right|\right) = 2\pi a^2 + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right|$$

Problema 14-16 Halle el área generada por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cuando a se hace girar alrededor del eje X.

Solución. $y' = -\dfrac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$, $1 + (y')^2 = 1 + \dfrac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = \dfrac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}} = \dfrac{a^{2/3}}{x^{2/3}}$. Entonces

$$A = 4\pi\int_0^a y\sqrt{1+(y')^2}\, dx = 4\pi\int_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\cdot\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\, dx = -\frac{12\pi a^{1/3}}{5}(a^{2/3}-x^{2/3})^{5/2}\Big|_0^a = \frac{12\pi a^2}{5}$$

Nota. Se empleó el hecho de que la curva es simétrica y se toma dos veces la integral de 0 a a.

Problema 14-17 Haga girar a $y = a/2(e^{x/a} + e^{-x/a})$ alrededor del eje X, desde $x = -a$ hasta $x = a$, y halle el área generada.

Solución. $y' = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$; $1 + (y')^2 = 1 + \frac{e^{2x/a}}{4} - \frac{2}{4} + \frac{e^{-2x/a}}{4} = \left[\frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})\right]^2$

$$A = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})\,\frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})\,dx = \frac{\pi a}{2}\int_{-a}^{a}(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a})\,dx$$

$$A = \frac{\pi a}{2}\left(\frac{a}{2}e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2}e^{-2x/a}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{\pi a}{2}(ae^2 - ae^{-2} + 4a) = \frac{\pi a^2}{2}(e^2 - e^{-2} + 4)$$

Problema 14-18 Halle el área generada cuando el arco de la parábola $y^2 = x$ entre $y = 1$ y -1 se hace girar alrededor de la recta $x = 1$. (Vea Fig. 14-8.)

Solución. $r = 1 - x = 1 - y^2$; $\frac{dx}{dy} = 2y$.

$A = 2\pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2)\sqrt{1 + 4y^2}\,dy$. Sea $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta$. Entonces

$$A = 2\pi \int_{\operatorname{arc\,tg}(-2)}^{\operatorname{arc\,tg} 2} \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta\right)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\,\frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta = \pi \int_{\operatorname{arc\,tg}(-2)}^{\operatorname{arc\,tg}(2)} \left(1 - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\theta\right)\sec^3\theta\,d\theta =$$

$$= \pi \int_{\operatorname{arc\,tg}(-2)}^{\operatorname{arc\,tg}(2)} \left(\frac{5}{4}\sec^3\theta - \frac{1}{4}\sec^5\theta\right) d\theta$$

Como $\int \sec^5\theta\,d\theta = \frac{\sec^3\theta\operatorname{tg}\theta}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3\theta\,d\theta$, se obtiene

$$A = \pi\left(\frac{\sec^3\theta\operatorname{tg}\theta}{-16}\Bigg|_{\operatorname{arc\,tg}(-2)}^{\operatorname{arc\,tg} 2} + \frac{17}{16}\int_{\operatorname{arc\,tg}(-2)}^{\operatorname{arc\,tg}(2)} \sec^3\theta\,d\theta\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{\sec^3\theta\operatorname{tg}\theta}{-16} + \frac{17}{32}\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \frac{17}{16}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right)\Bigg|_{\operatorname{arc\,tg}(-2)}^{\operatorname{arc\,tg} 2}$$

Según el triángulo de la Figura 14-9, arc tg $\pm 2 = \sqrt{5}$.

$$\therefore\ A = \pi\left(-\frac{10\sqrt{5}}{16} + \frac{17\sqrt{5}}{16} + \frac{17}{32}\ln\left|\sqrt{5} + 2\right| - \frac{10\sqrt{5}}{16} + \frac{17\sqrt{5}}{16} - \frac{17}{32}\ln\left|\sqrt{5} - 2\right|\right) =$$

$$= \frac{17\pi}{32}\ln\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} + \frac{7\sqrt{5}\pi}{8}$$

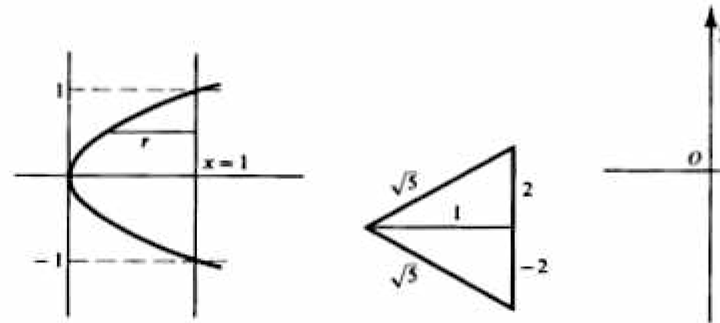


Figura 14-8

Figura 14-9

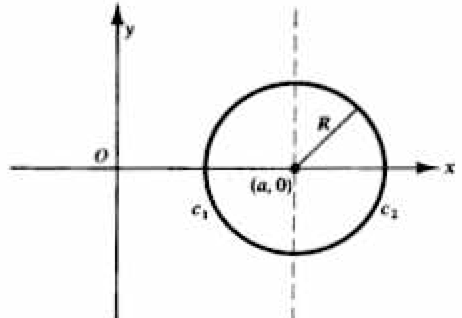


Figura 14-10

Problema 14-19 Determine el área lateral de un toro de revolución.

Solución. La ecuación de la circunferencia generatriz es

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2,\ R < a \Rightarrow x = a \pm \sqrt{R^2 - y^2} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \equiv x = a - \sqrt{R^2 - y^2} \\ c_2 \equiv x = a + \sqrt{R^2 - y^2} \end{cases}$$

que son las ecuaciones de los dos arcos en que se descompone el círculo. (Vea Fig. 14-10.)

a) El área lateral engendrada por el giro de c_1,

$$A_1 = 4\pi \int_0^R x(y)\sqrt{1 + (y/\sqrt{R^2 - y^2})^2}\ dy = 4\pi \int_0^R (a - \sqrt{R^2 - y^2})\ \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\ dy =$$

$$= 4\pi \int_0^R \frac{aR}{\sqrt{R^2 - y^2}}\ dy - 4\pi \int_0^R R\ dy = 4\pi\left(\left[aR \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{R}\right]_0^R - \left[Ry\right]_0^R\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{aR\pi}{2} - R^2\right) = 4\pi R\left(\frac{a\pi}{2} - R\right)$$

b) El área lateral engendrada por el giro de c_2,

$$A_2 = 4\pi \int_0^R (a + \sqrt{R^2 - y^2})\ \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\ dy = 4\pi R\left[\frac{a\pi}{2} + R\right]$$

Y el área total, $A = A_1 + A_2 = 4\pi^2 aR$.

Problema 14-20 Determine el área engendrada, al girar la cicloide, de ecuaciones paramétricas $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1 - \cos t)$ alrededor del eje X.

Solución. $A = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t)\ ds = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{[dx(t)]^2 + [dy(t)]^2}$; $dx(t) = R(1 - \cos t)\,dt$, $dy(t) = R \operatorname{sen} t\ dt$.

Sustituyendo,
$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} R(1 - \cos t)\sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 t}\ dt =$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2 - 2\cos t}\ dt = 2\sqrt{2}\pi R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\ dt$$

Teniendo en cuenta que $1 - \cos t = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}$, resulta $A = 8\pi R^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2}\ dt = 16\pi R^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 u\ du =$
$= (2)\left(16\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 u\ du\right) = 2^5\pi R^2\ \frac{2!!}{3!!} = \frac{2^6\pi R^2}{1 \cdot 3}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle la longitud de arco de $y = \ln(\cos x)$ entre $x = 0$ y $x = \pi/3$. *Resp.:* $\ln(2 + 3^{1/2})$

2. Halle la longitud de arco de la parábola $x^2 = 2py$ desde el vértice a un extremo del «latus rectum».
Resp.: $\dfrac{p}{\sqrt{2}} + p\ln(1 + \sqrt{2})/2$

3. Halle la longitud entre $x = a$ y $x = b$ de la curva $e^y = (e^x + 1)/(e^x - 1)$; $b > a > 0$.
Resp.: $\ln[(e^{2b} - 1)/(e^{2a} - 1)] + a - b$

4. Las ecuaciones de la involuta de un círculo son $x = a(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$. Halle la longitud de un arco entre $\theta = 0$ y $\theta = \alpha > 0$.
Resp.: $a\dfrac{\alpha^2}{2}$

5. Halle la longitud de la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$ desde el vértice $A(0, a)$ hasta el punto $B(b, h)$.

Resp.: $\sqrt{h^2 - a^2}$

6. Halle la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.

Resp.: $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

7. Halle la longitud del arco $y = \text{arc sen}\,(e^{-x})$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Resp.: $\ln (e + \sqrt{e^2 - 1})$

8. Halle la longitud del arco de la curva $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$, desde $y = 1$ hasta $y = e$.

Resp.: $\frac{1}{4} (e^2 + 1)$

9. Halle la longitud del arco de la rama derecha de la tractriz $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ a $\ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right|$ desde $y = a$ hasta $y = b$ $(0 < b < a)$.

Resp.: $a \ln \frac{a}{b}$

10. Halle la longitud del arco de la evolvente de círculo $x = a(\cos t + t \,\text{sen}\, t)$, $y = a(\text{sen}\, t - t \cos t)$ desde $t = 0$ hasta $t = T$.

Resp.: $\frac{1}{2} aT^2$

11. Halle la longitud de la evoluta de la elipse $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$; $y = \frac{c^2}{b} \text{sen}^3\, t$, $(c^2 = a^2 - b^2)$.

Resp.: $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$

12. Halle la longitud de la curva $y = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 2t)$. *Resp.:* $16a$

13. *a)* Halle la longitud de arco de $y = \int_0^x \sqrt{e^{2t} - 1}\, dt$, $a \leq x \leq b$; *b)* $y = \int_0^x \sqrt{\sec^4 t - 1}\, dt$, $0 \leq x \leq \pi/4$; *c)* $x = t^2$, $y = \frac{1}{6}(4t + 1)^{3/2}$, $4 \leq t \leq 6$. *Resp.:* *a)* $e^b - e^a$; *b)* 1; *c)* 22

14. Determine la longitud entre 0 y x de un arco de la curva $y = e^x$.

Resp.: $s = \sqrt{e^{2x} + 1} - \sqrt{2} + \text{arg tgh}\, \frac{3\sqrt{e^{2x} + 1} - \sqrt{2}(2 + e^{2x})}{1 + 2e^{2x}}$

15. Halle el área de la superficie engendrada por la rotación de la parte de la tangentoide $y = \text{tg}\, x$, comprendida entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$, alrededor del eje X. *Resp.:* $\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \pi \ln \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{5} + 1}$

16. Halle el área de la superficie engendrada por la rotación alrededor del eje X del arco de la curva $y = e^{-x}$ comprendido entre $x = 0$ y $x = +\infty$.

Resp.: $\pi[\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})]$

17. Halle el área de la superficie (denominada catenoide) engendrada por la rotación de la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$ alrededor del eje X, entre los límites $x = 0$ y $x = a$.

Resp.: $\frac{\pi a^2}{4} (e^2 + e^{-2} + 4)$

18. Halle el área de la superficie de revolución de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ alrededor del eje Y.

Resp.: $\frac{12}{5} \pi a^2$

19. Halle el área de la superficie de revolución de la curva $x = y^2/4 - 1/2 \log y$ alrededor del eje X comprendida entre $y = 1$ y $y = e$.

Resp.: $\frac{\pi}{3} (e - 1)(e^2 + e + 4)$

20. Halle el área de la superficie engendrada al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor: *a)* del eje X; *b)* del eje $Y (a > b)$.

Resp.: *a)* $2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \text{arc sen}\, \varepsilon$; *b)* $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}$, con $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

CAPITULO 15

Momentos. Centro de gravedad

1. *Momento estático.* Se denomina momento estático de un punto material A, de masa m, situado a una distancia d del eje l, con respecto a este mismo eje l, la magnitud

$$M_l = md$$

Recibe el nombre de momento estático de un sistema de n puntos materiales, de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, situados en el mismo plano que el eje l, con respecto al cual se toman, y separados de él por las distancias $d_1, d_2, \ldots, d_n$, la suma

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \qquad (15\text{-}1)$$

debiendo tomarse las distancias de los puntos que se encuentren a un lado del eje l con signo más (+), y los que estén al otro, con signo menos (−). En forma análoga se determina el momento estático de un sistema de puntos con respecto a un plano.

Si la masa ocupa continuamente toda una linea o una figura del plano XY, los momentos estáticos M_x y M_y respecto a los ejes coordenados, en lugar de la suma (15-1), se expresan por las correspondientes integrales. Cuando se trata de figuras geométricas, la densidad se considera igual a la unidad. En particular:

a) Momento de una curva. El primer momento de un arco de una curva está dado por

$$M_x = \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$M_y = \int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

b) Momentos de áreas y volúmenes. Si el área limitada por $y = f(x)$, el eje X, $x = a$ y $x = b$, se divide en franjas delgadas por rectas paralelas al eje Y y que pasan por los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, sea ξ_i la abscisa del centro de gravedad de la i-ésima franja, y $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. El momento de un elemento de área respecto al eje Y es $\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i$, y el momento del área total M_y, respecto al eje Y, es

$$M_y = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b x f(x)\,dx = A\bar{x}$$

siendo A la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\bar{x}$ la abscisa del centro del área.

2. *Momento de inercia.* Se da el nombre de momento de inercia, respecto a un eje l, de un sistema de n puntos materiales, de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, a la suma

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

donde $d_1, d_2, \ldots, d_n$ son las distancias desde los puntos al eje l. Cuando la masa es continua, en lugar de la suma obtendremos la integral correspondiente: $\int_a^b x^2 y\, dx$.

El área limitada por $y = f(x)$, el eje X, y $x = a$, $x = b$, su momento de inercia respecto al eje Y está dado por $I_y = \int_a^b x^2 y\, dx$.

3. *Centro de gravedad.* Las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana (ya sea arco o superficie) de masa M se calculan por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

donde M_x y M_y son los momentos estáticos de las masas. Cuando se trata de figuras geométricas, la masa M es numéricamente igual al correspondiente arco o al área.

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide se definen por $\bar{x}s = M$ y $\bar{y}s = M$, respectivamente, siendo s la longitud de arco de (a,c) a (b,d). Análogamente, el segundo momento del arco está dado por

$$I_x = \int_a^b y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_c^d y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_c^d x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

El radio de giro R alrededor del eje X y del eje Y está definido por $R^2 s = I_x$ y $R^2 s = I_y$, respectivamente.

4. *Momentos con respecto a los planos.* Los momentos de un volumen con respecto al plano xy están dados por $M_{xy} = \int_a^b z A(z)\, dz$, siendo $A(z)$ el área de la sección paralela al plano xy. Expresiones análogas se pueden escribir para los momentos con respecto a los planos xz y yz. Para una superficie generada por rotación alrededor del eje X, el momento con relación al plano yz está dado por $N_{yz} = 2\pi \int_a^b xy\, ds$. Por simetría, el centroide de esta superficie está sobre el eje X.

Teoremas de Pappus

Teorema 1. El área de la superficie engendrada por la rotación del arco de una curva plana alrededor de un eje, situado en el mismo plano que la curva, pero que no se corta con ella, es igual al producto de la longitud de dicho arco por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad del mismo. (Vea Fig. 15-1.)

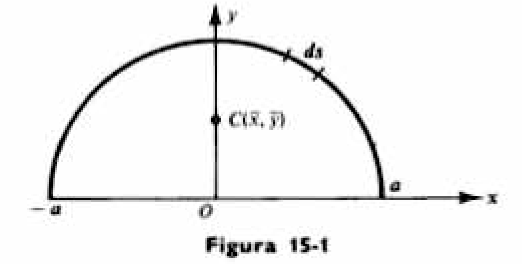


Figura 15-1

Teorema 2. El volumen del cuerpo engendrado por la rotación de una figura plana alrededor de un eje, situado en el mismo plano que la figura, pero que no se corta con ella, es igual al producto del área de dicha figura por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la misma.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 15-1 Halle las coordenadas del centroide del área limitada por $y = x^2$, $x = 3$, $y = 0$. (Vea Fig. 15-2.)

Solución. $A = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9;\ \bar{x} = \frac{1}{9}\int_0^3 x \cdot x^2\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{9}{4}.$

Para hallar $\bar{y}$ se debe tomar el primer momento con respecto al eje X. El área de una franja vertical es $x^2\,dx$. El centroide de esta franja vertical está aproximadamente a la mitad de su longitud, o $\frac{x^2}{2}$ por encima del eje X. Entonces el primer momento con relación al eje X es $\frac{x^4}{2}$. Sumando todos los momentos elementales y pasando al límite se obtiene

$$\bar{y} = \frac{1}{9}\int_0^3 \frac{x^4}{2}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{x^5}{10}\Big|_0^3 = 2{,}7$$

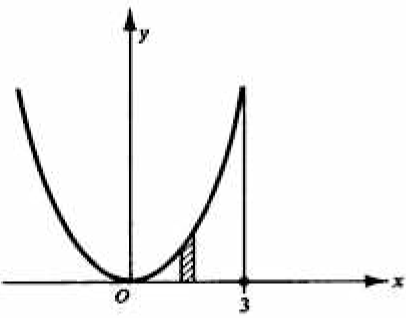


Figura 15-2

Otro método de hallar $\bar{y}$ es usar franjas horizontales. Sea (x, y) un punto de la curva. El área aproximada de una franja horizontal es $(3 - x)\,dy = (3 - \sqrt{y})\,dy$, porque $y = x^2$. El centroide de esta franja está aproximadamente a una distancia y del eje X. Su momento con respecto al eje X es $y(3 - \sqrt{y})\,dy$. Tomando el límite de la suma de todos los momentos elementales de $y = 0$ a $y = 9$, se obtiene

$$\bar{y} = \frac{1}{9}\int_0^9 y(3 - \sqrt{y})\,dy = \frac{1}{9}\int_0^9 (3y - y^{3/2})\,dy = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}y^2 - \frac{2}{5}y^{5/2}\right)\Big|_0^9 = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}9^2 - \frac{2}{5}9^{5/2}\right) = 2{,}7$$

Problema 15-2 Halle el centroide del área limitada por $y = -x^2 + 4$, $y = 0$.

Solución. Por simetría, $\bar{x} = 0$; $A = 2\int_0^2 y\,dx = 2\int_0^2 (-x^2 + 4)\,dx = 2\left(-\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Big|_0^2 = \frac{32}{3}.$

Empleando franjas verticales, $\bar{y} = 2 \cdot \frac{3}{32}\int_0^2 \frac{y}{2}\,y\,dx = \frac{3}{32}\int_0^2 y^2\,dx = \frac{3}{32}\int_0^2 (-x^2 + 4)^2\,dx =$

$$= \frac{3}{32}\int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx = \frac{3}{32}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x\right)\Big|_0^2 = 1{,}6$$

Empleando franjas horizontales, $\bar{y} = \frac{3}{32}\int_0^4 2y \cdot x\,dy = \frac{3}{32}\int_0^4 2y(4 - y)^{1/2}\,dy.$

Problema 15-3 El área del problema anterior se hace girar alrededor del eje Y para obtener un paraboloide de revolución. Halle el centroide de este volumen.

Solución. Por simetría, el centroide está sobre el eje Y. Divida el volumen en franjas por medio de planos perpendiculares al eje Y.

$$V = \int_0^4 \pi x^2\,dy = \int_0^4 \pi(4 - y)\,dy = \pi\left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 8\pi$$

$$\bar{y} = \frac{1}{V}\int_0^4 y \cdot \pi x^2\,dy = \frac{1}{8\pi}\int_0^4 y\pi(4 - y)\,dy = \frac{1}{8\pi}\,\pi\left(2y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \frac{4}{3}$$

puesto que el centroide de una franja está sobre el eje Y aproximadamente a una distancia y del origen.

Problema 15-4 Halle el centroide de un cono recto circular de radio r y altura h. (Vea Figura 15-3.)

Solución. Como un cono se genera al girar la parte de la recta $y = \frac{r}{h}x$ desde $x = 0$ hasta $x = h$, alrededor del eje X, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\int_0^h x\pi y^2\,dx = \frac{3}{\pi r^2 h}\int_0^h x\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{3}{h^3}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^h = \frac{3h}{4}$$

El centroide está sobre el eje X.

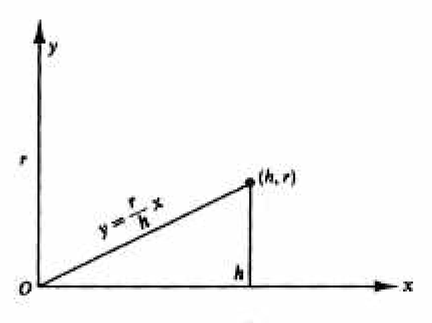


Figura 15-3

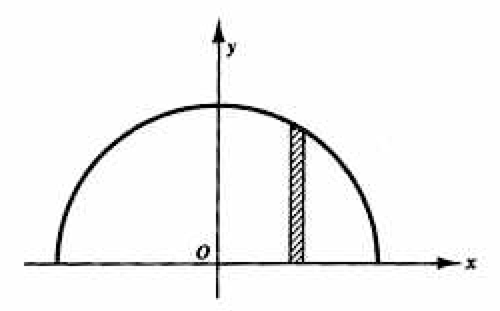


Figura 15-4

Problema 15-5 Halle el centroide de un área semicircular de radio a. (Vea Fig. 15-4.)

Solución. Sea $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ la ecuación del semicírculo. Empleando franjas verticales, el área de una de ellas es $y\,dx = \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, y su momento con respecto al eje X es

$$\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\,dx$$

Entonces $A = \frac{1}{2}\pi a^2$; $A\bar{y} = 2\int_0^a \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\,dx = \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3$.

$$\therefore\quad \bar{y} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{4a}{3\pi}.\ \text{Por simetría, } \bar{x} = 0.$$

Problema 15-6 Muestre que el centroide de un triángulo está situado en el punto de trisección de las medianas. (Vea Fig. 15-5.)

Solución. Divida el triángulo ABC en dos triángulos rectángulos dibujando una altura a la base AC. Supongamos que la base y la altura coinciden, respectivamente, con el eje X y el eje Y. La ecuación de BC es $x/a + y/h = 1$. El área del triángulo $OBC = ah/2$, y

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^a \frac{y}{2}\cdot y\,dx = \frac{2}{ah}\int_0^a \frac{1}{2}h^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = -h\int_0^a\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\left(-\frac{dx}{a}\right) =$$
$$= -\frac{h}{3}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3\Big|_0^a = \frac{h}{3}$$

El mismo resultado se obtiene para el triángulo AOB y, por tanto, para el triángulo ABC, $\bar{y} = h/3$.

El centroide de ABC está sobre una recta paralela a AC y pasa por el punto de trisección de las medianas. (Recuerde que las medianas de un triángulo son concurrentes en un punto.) El mismo resultado es verdadero para cualquiera de los otros dos lados del triángulo ABC. Entonces el centroide de ABC debe estar en el punto de trisección de las medianas.

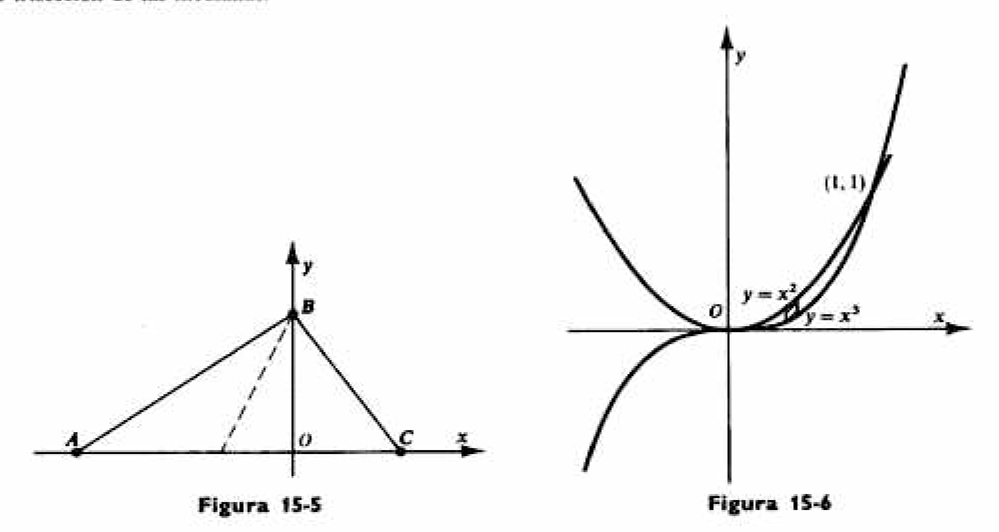


Figura 15-5 Figura 15-6

Problema 15-7 Halle el centroide del área limitada por $y = x^3$, $y = x^2$. (Vea Fig. 15-6.)

Solución. Las curvas se cortan en (0,0) y (1,1).

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$A\bar{y} = \int_0^1 \frac{x^2 + x^3}{2}(x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^4 - x^6)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{35}, \quad \therefore \quad \bar{y} = \frac{12}{35}$$

$$A\bar{x} = \int_0^1 x(x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{20}, \quad \therefore \quad \bar{x} = \frac{12}{20}$$

Problema 15-8 Halle el momento de inercia y el radio de giro de un rectángulo de dimensiones a y b con respecto al lado a. (Vea Fig. 15-7.)

Solución. $I_x = \int_0^b y^2(a\,dy) = \frac{ay^3}{3}\Big|_0^b = \frac{ab^3}{3} = M\,\frac{b^2}{3}$.

Si M representa el área,

$$R^2M = I_x;\ R^2 = \frac{b^2}{3};\ R = \frac{\sqrt{3}}{3}\,b$$

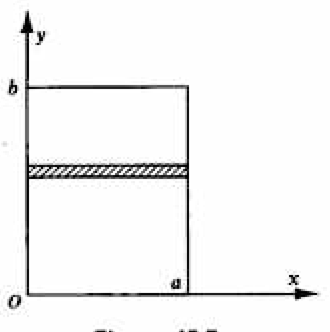


Figura 15-7

Problema 15-9 Halle: *a*) el momento de inercia, y *b*) el radio de giro con respecto al eje X del área limitada por $y^2 = 4x$, su «latus rectum» y el eje X.

Solución. *a)* $A = \int_1^2 (1 - x)\,dy = \int_0^2 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) dy = \left(y - \frac{y^3}{12}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$

$$I_x = \int_0^2 y^2(1 - x)\,dy = \int_0^2 y^2 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{20}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{15}$$

Para verificar I_x se usan franjas verticales y el resultado del Problema 15-8.

El área de una franja es $y\,dx$ y $R^2 = y^2/3$. Entonces

$$I_x = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\,y\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 8x^{3/2}\,dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{5} x^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{16}{15}$$

Si $M = A = \frac{4}{3}$, $I_x = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15}\right)\frac{4}{3} = \frac{4}{5} M.$

b) $R^2 A = I_x$; $R^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{15}$; $R^2 = \frac{4}{5}$; $R = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$

Problema 15-10 *a)* Halle el momento de inercia de un cilindro recto circular con respecto a su eje si su radio es a y su altura h.

b) Halle el momento de inercia de un cono recto circular con respecto a su eje si su radio es a y su altura h.

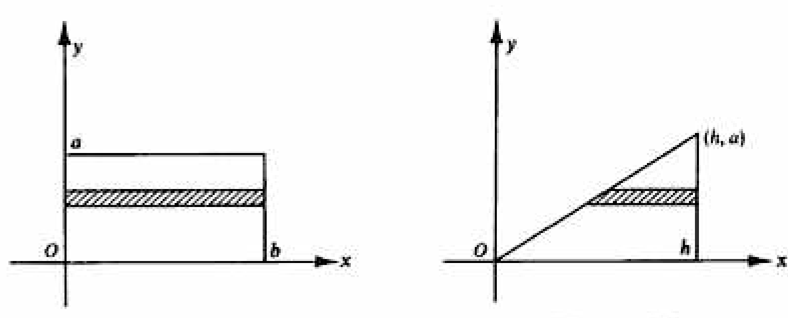


Figura 15-8 Figura 15-9

Solución. *a)* Suponga que el cilindro se genera al hacer girar un rectángulo alrededor del eje X. Un tubo con $I_x = y^2 2\pi y h\,dy$ está generado por el área rayada en la Figura 15-8. Entonces para el cilindro

$$I_x = \int_0^a 2\pi h y^3\,dy = \frac{\pi h a^4}{2} = \frac{Ma^2}{2}$$

b) Suponga que el cono se genera al hacer girar a $y = \frac{a}{h}x$ desde $x = 0$ hasta $x = h$ alrededor del eje X. Emplee tubos generados por la franja rayada en la Figura 15-9.

$$I_x = \int_0^a y^2\, 2\pi y(h - x)\,dy = 2\pi \int_0^a y^3 \left(h - \frac{hy}{a}\right) dy = 2\pi h\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5a}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{10} ha^4$$

$$M = V = \frac{\pi a^2 h}{3};\ I_x = \frac{\pi a^2 h}{3}\left(\frac{\pi h a^4}{10} \cdot \frac{3}{\pi a^2 h}\right) = \frac{3}{10} Ma^2;\ R^2 M = I_x \Rightarrow R^2 = \frac{3}{10}a^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{30}a}{10}$$

Problema 15-11 Halle el momento de inercia de las áreas limitadas por $y^2 = x^3$, $x = 4$ con respecto a: *a)* el eje X; *b)* $x = 4$; *c)* el eje Y.

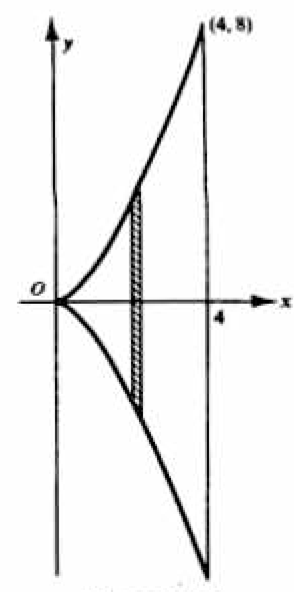


Figura 15-10

Figura 15-11

Solución. *a*) Empleando elementos paralelos al eje X,

$$A = M = 2\int_0^8 (4 - x)\,dy = 2\int_0^8 (4 - y^{2/3})\,dy = 2\left(4y - \frac{3}{5}y^{5/3}\right)\Big|_0^8 = \frac{128}{5} = \frac{2^7}{5}$$

El momento de inercia de un elemento es

$$\Delta I_x = y^2(4 - x)\,dy;\ I_x = \int_{-8}^{8} y^2(4 - x)\,dy = \int_{-8}^{8} y^2(4 - y^{2/3})\,dy = \left(\frac{4}{3}y^3 - \frac{3}{11}y^{11/3}\right)\Big|_{-8}^{8} =$$

$$= \frac{2^{13}}{33} = \left(\frac{5}{2^7}\cdot\frac{2^{13}}{33}\right)\frac{2^7}{5} = \frac{320}{33}M$$

Empleando elementos paralelos al eje Y y el resultado del Problema 15-8,

$$\Delta I_x = \frac{2}{3}y^2 \cdot y \cdot dx;\ I_x = \frac{2}{3}\int_0^4 y^3\,dx = \frac{2}{3}\int_0^4 x^{9/2}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{11}x^{11/2}\Big|_0^4 = \frac{2^{13}}{33} = \frac{320}{33}M$$

b) Empleando elementos paralelos al eje Y, el área de un elemento es $2y\,dx$.

Entonces $\Delta I_{x=4} = 2(4 - x)^2 y\,dx$.

$$I_{x=4} = 2\int_0^4 (4 - x)^2 y\,dx = 2\int_0^4 (4 - x)^2 x^{3/2}\,dx = 2\int_0^4 (16x^{3/2} - 8x^{5/2} + x^{7/2})\,dx =$$

$$= 2\left(\frac{32}{5}x^{5/2} - \frac{16}{7}x^{7/2} + \frac{2}{9}x^{9/2}\right)\Big|_0^4 = \frac{2^{14}}{315} = \frac{128}{63}M$$

Empleando elementos paralelos al eje X,

$$\Delta I_{x=4} = \frac{1}{3}(4 - x)^2(4 - x)\,dy;\ I_{x=4} = \frac{1}{3}\int_{-8}^{8}(4 - x)^3\,dy = \frac{1}{3}\int_{-8}^{8}(4 - y^{2/3})^3\,dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-8}^{8}(64 - 48x^{2/3} + 12x^{4/3} - x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left(64x - \frac{144}{5}x^{5/3} + \frac{36}{7}x^{7/3} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-8}^{8} = \frac{2^{14}}{315} = \frac{128}{63}M$$

c) Empleando elementos paralelos al eje Y, $\Delta I_y = x^2 \cdot 2y\,dx$.

$$I_y = 2\int_0^4 x^2 y\,dx = 2\int_0^4 x^2\cdot x^{3/2}\,dx = 2\int_0^4 x^{7/2}\,dx = 2\cdot\frac{2}{9}x^{9/2}\Big|_0^4 = \frac{2048}{9} = \frac{80}{9}M$$

Usando elementos paralelos al eje X. En este caso se debe tomar la diferencia de los momentos de inercia de los dos rectángulos que se muestran en la Figura 15-11.

$$\Delta I_y = \frac{1}{3}4^2 \cdot 4\,dy - \frac{1}{3}x^2 \cdot x\,dy;\ I_y = \int_{-8}^{8} \frac{64}{3}\,dy - \int_{-8}^{8} \frac{x^3}{3}\,dy = \frac{64}{3}\int_{-8}^{8} dy - \frac{1}{3}\int_{-8}^{8} y^2\,dy =$$

$$= \frac{64}{3}\,y\Big|_{-8}^{8} - \frac{1}{9}\,y^3\Big|_{-8}^{8} = \frac{2^{10}}{3} - \frac{2^{10}}{9} = \frac{2^{11}}{9} = \frac{2048}{9} = \frac{80}{9}\,M$$

Observe que los rectángulos perpendiculares al eje de rotación, pero quitados, dan lugar al cálculo separado de dos momentos de inercia.

Problema 15-12 Para el arco que va de $(0, a)$ a $(a, 0)$ de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, halle: *a)* $(\bar{x}, \bar{y})$; *b)* I_x y el correspondiente R; *c)* I_y y el correspondiente R.

Solución. *a)* Según el Problema 14-16, $ds = a^{1/3}x^{-1/3}\,dx$, y el valor de s entre los dos puntos dados es $1{,}5a$.

$$M_y = \int_0^a x a^{1/3} x^{-1/3}\,dx = 0{,}6a^2;\ \bar{x}(1{,}5a) = 0{,}6a^2 \Rightarrow \bar{x} = 0{,}4a$$

Por simetría, $\bar{y} = \bar{x} = 0{,}4a$.

b) $I_y = \int_0^a x^2 a^{1/3} x^{-1/3}\,dx = \frac{3}{8}a^3;\ R^2\,\frac{3}{2}a = \frac{3}{8}a^3;\ R = 0{,}5a.$

c) Por simetría, $I_y = I_x = \frac{3}{8}a^3;\ R = 0{,}5a.$

Problema 15-13 Halle el centroide del semicírculo superior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución. $2x + yy' = 0;\ y' = -x/y;\ M_x = \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx = \int_{-a}^{a} dx = 2a^2;\ \bar{y}s = M_x;$

$$\bar{y}\pi a = 2a^2 \Rightarrow \bar{y} = \frac{2a}{\pi} = 0{,}367a;\ \bar{x} = 0$$

Problema 15-14 *a)* Halle el radio de giro alrededor de $x = 0$ del arco que va de $x = 1$ a $x = 4$ de la curva $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$. *b)* Halle el momento de inercia con respecto a $y = 0$ del arco que va de $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ a $\left(\frac{19}{12}, 2\right)$ de la curva $y^4 - 6xy + 3 = 0$.

Solución. *a)* $ds = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx$ y $s = \frac{15}{4} + \ln 2$.

$$I_y = \int_1^4 x^2\,\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4 = 35{,}62;\ R^2 s = I_y;\ R^2\left(\frac{15}{4} + \ln 2\right) = 35{,}62 \Rightarrow R = 2{,}83$$

b) $ds = \frac{1}{2}\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)dy;\ I_x = \int_1^2 y^2\,\frac{1}{2}\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)dy = \frac{1}{2}\int_1^2 (y^4 + 1)\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^5}{5} + y\right)\Big|_1^2 = 3{,}6$

Problema 15-15 Halle el centroide de un cuadrante del área de la elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\,\text{sen}\,\theta$.

Solución. Por un problema anterior, $A = \pi ab/4$. Entonces

$$M_x = \int_0^b xy\,dy = \int_0^{\pi/2} a\cos\theta b\,\mathrm{sen}\,\theta b\cos\theta\,d\theta = -\frac{ab^2}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab^2}{3}$$

$$M_y = \int_0^a xy\,dx = \int_{\pi/2}^0 a\cos\theta b\,\mathrm{sen}\,\theta(-a\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta = \frac{-a^2b}{3}\mathrm{sen}^3\,\theta\Big|_{\pi/2}^0 = \frac{a^2b}{3}$$

$$\bar{x} = (a^2b/3)/(\pi ab/4) = \frac{3a}{3\pi};\ \bar{y} = (ab^2/3)/(\pi ab/4) = \frac{4b}{3\pi}$$

Los cálculos también se habrían podido hacer de la siguiente manera:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 b^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta(-a\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta = \frac{ab^2}{2}\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_{\pi/2}^0 = \frac{ab^2}{3}$$

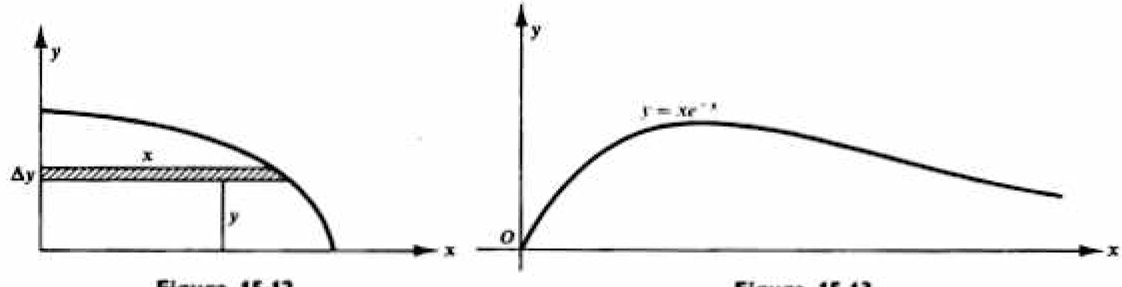


Figura 15-12

Figura 15-13

Problema 15-16 Halle el centroide del área limitada por la curva $y = xe^{-x}$ en el primer cuadrante. (Vea Fig. 15-13.)

Solución.

$$A = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^\infty = 1;\ M_x = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{8}$$

$$M_y = \int_0^\infty xy\,dx = \int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = (-x^2 2^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x})\Big|_0^\infty = 2$$

$$\bar{x} = 2,\ \bar{y} = \frac{1}{8}$$

Problema 15-17 Halle el centroide del área comprendida por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$.

Solución.

$$A = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2\,dx = \frac{1}{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 - 3\cos\theta + 3\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - (1 - \mathrm{sen}^2\,\theta)\cos\theta\right]d\theta = \frac{a^3}{2}\left(\frac{5}{2}\theta - 3\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{3}{4}\mathrm{sen}\,2\theta - \mathrm{sen}\,\theta + \frac{\mathrm{sen}^3\,\theta}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{5\pi a^3}{2}$$

$$M_y = \int_0^{2\pi} xy\,dx = a^3 \int_0^{2\pi} (\theta - \text{sen}\,\theta)(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)\,d\theta = a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2(-\text{sen}\,\theta)\,d\theta +$$

$$+ a^3 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\theta\,d\theta + a^3 \int_0^{2\pi} \left(-2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)\theta\,d\theta = -\frac{a^3}{3}(1 - \cos\theta)^3 \Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ a^3\left(-2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right)\theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{3a^2\theta^2}{4}\Big|_0^{2\pi} - a^3 \int_0^{2\pi} \left(-2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right) d\theta =$$

$$= 3a^3\pi^2 - a^3\left(2\cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{8}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3a^3\pi^2;\ \bar{x} = \frac{3\pi^2a^3}{3\pi a^2} = \pi a;\ \bar{y} = \frac{\frac{5\pi a^3}{2}}{3\pi a^2} = \frac{5a}{6}$$

Se habría podido obtener $\bar{x}$ empleando la simetría de la curva. Observe que no se ha calculado M_x por medio de $\int xy\,dy$. El área de la franja no es $x\Delta y$, sino

$$dA = a^2[(2\pi - \theta - \text{sen}\,(2\pi - \theta)] - (\theta - \text{sen}\,\theta)]$$
$$\text{sen}\,\theta\,d\theta = a^2(2\pi - 2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

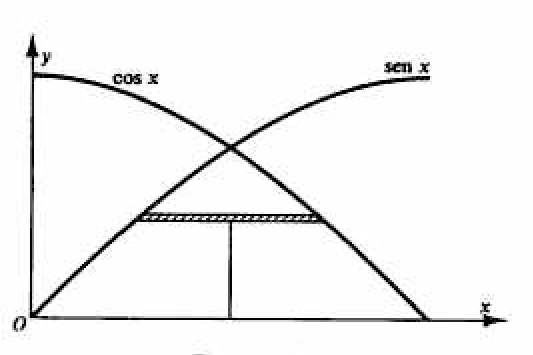


Figura 15-14

Problema 15-18 Halle el centroide del área limitada por el eje X, las curvas $y = \text{sen}\,x$, $y = \cos x$ de 0 a $\pi/2$. (Vea Fig. 15-14.)

Solución. $A = \int_0^{\pi/4} \text{sen}\,x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/4} + \text{sen}\,x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 2 - \sqrt{2}$. Eligiendo franjas paralelas al eje X de área $(x_2 - x_1)\Delta y$, tenemos que sus momentos con relación al eje X son

$$M_x = \int y\,dA = \int_0^{\sqrt{2}/2} y\,(x_2 - x_1)\,dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} y\,(\text{arc cos}\,y - \text{arc sen}\,y)\,dy = \frac{1}{2}y^2\,(\text{arc cos}\,y - \text{arc sen}\,y)\Big|_0^{\sqrt{2}/2}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{y^2}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\right)dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Sea $y = \text{sen}\,\theta$.

$$M_x = \int_0^{\pi/4} \frac{\text{sen}^2\,\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\theta}} = \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\,d\theta = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

También $$M_x = \frac{1}{2}\int y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \text{sen}^2\,x\,dx + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{\text{sen}\,2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{4}\left(x + \frac{\text{sen}\,2x}{2}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$M_y = \int xy\,dx = \int_0^{\pi/4} x\,\text{sen}\,x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} x\cos x\,dx = (-x\cos x + \text{sen}\,x)\Big|_0^{\pi/4} + (x\,\text{sen}\,x + \cos x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}(2 - \sqrt{2});$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{\pi}{4}(2 - \sqrt{2})}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\pi}{4};\ \bar{y} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)(2 + \sqrt{2})$$

$\bar{x}$ también se habría podido hallar empleando la simetría de la curva con respecto a la recta $x = \pi/4$.

Problema 15-19 Halle el centroide en el primer cuadrante del arco limitado por los dos ejes, de $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Solución. Por un problema anterior, $s = 3/2a$, $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \dfrac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx$.

$$M_x = \int_0^a y\,ds = \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx = -\frac{3}{5}(a^{2/3} - x^{2/3})^{5/2}a^{1/3}\Big|_0^a = \frac{3}{5}a^2$$

$$M_y = \int_0^a x\,ds = a^{1/3}\int_0^a x^{2/3}\,dx = \frac{3}{5}a^{1/3}x^{5/3}\Big|_0^a = \frac{3}{5}a^2;\ \bar{x} = \frac{2}{5}a;\ \bar{y} = \frac{2}{5}a$$

Problema 15-20 Halle el centroide de un arco de la cicloide $x = a(\theta - \cos\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$.

Solución. $ds = \sqrt{a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2\,\text{sen}^2\,\theta}\,d\theta = a\sqrt{2 - 2\cos\theta}\,d\theta$.

En el Problema 14-6 se determinó que la longitud del arco es $8a$.

$$M_x = \int_0^{2\pi} y\,ds = a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos\theta)\sqrt{2 - 2\cos\theta}\,d\theta = 4a^2\int_0^{2\pi}\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a^2\left(-2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}a^2$$

$$M_y = \int_0^{2\pi} x\,ds = a^2\int_0^{2\pi}(\theta - \text{sen}\,\theta)\sqrt{2 - 2\cos\theta}\,d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi}\theta\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta - a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos\theta)^{1/2}\,\text{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$= 2a^2\left(-2\,\theta\cos\frac{\theta}{2} + 4\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -a^2\sqrt{2}\,\frac{2}{3}(1 - \cos\theta)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} = 8\pi a^2$$

$$\bar{x} = \pi a;\ \bar{y} = \frac{4}{3}a$$

Por consideraciones de simetría, también se habría podido hallar $\bar{x}$.

Problema 15-21 Halle el centroide de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$. (Vea Fig. 15-15.)

Solución. Por semejanza de triángulos, tenemos que

$$\bar{x}_i = \frac{2}{3}r_i\,\cos\theta_i;\ y_i = \frac{2}{3}r_i\,\text{sen}\,\theta_i$$

El momento de este triángulo se puede escribir como

$$M_{x_i} = \frac{2}{3}r_i\,\text{sen}\,\theta_i\,\Delta A_i;\ M_{y_i} = \frac{2}{3}r_i\cos\theta_i\,\Delta A_i;\ \Delta A_i = \frac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta_i$$

$$M_{x_i} = \frac{1}{3}r_i^3\,\text{sen}\,\theta_i\,\Delta\theta_i;\ M_{y_i} = \frac{1}{3}r_i^3\cos\theta_i\,\Delta\theta_i;\ A\bar{x} = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta\,d\theta$$

$$A_y = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta r^3\,\text{sen}\,\theta\,d\theta.\ \text{Entonces}\ A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\theta)^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\theta + 2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2/2.$$

$$\frac{3}{2}\pi a^2\bar{x} = \frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}(1 + \cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}\left[\cos\theta + 3\left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) + 3(1 - \text{sen}^2\,\theta)\cos\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right)\right]d\theta = \frac{1}{3}a^3\left(\frac{15}{8}\theta + 4\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta - \text{sen}^3\,\theta + \frac{1}{32}\,\text{sen}\,4\theta\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{5}{4}\pi a^3$$

$$\frac{3}{2}\pi a^2\bar{y} = \frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}(1 + \cos\theta)^3\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = -\frac{1}{12}a^3(1 + \cos\theta)^4\Big|_0^{2\pi} = 0;\ \therefore\ \bar{x} = \frac{5}{6}a;\ \bar{y} = 0$$

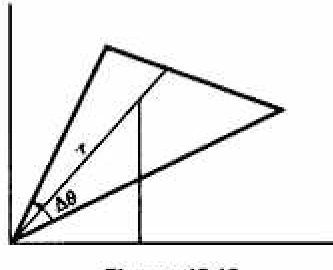



Figura 15-15

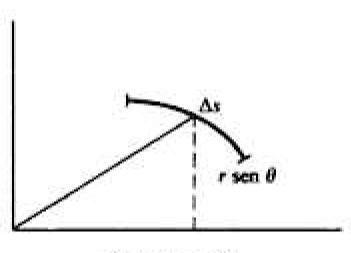


Figura 15-16

Problema 15-22 Halle el centroide de un arco dado en coordenadas polares y halle el momento del arco de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$. (Vea Fig. 15-16.)

Solución. El momento de un elemento de arco es $M_{x_i} = r_i \operatorname{sen} \theta_i \Delta s_i$.

$$M_x = \int_\alpha^\beta r \operatorname{sen}\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta; \quad M_y = \int_\alpha^\beta r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$ds = a\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta; \; s = 2\int_0^\pi \sqrt{2}a(1+\cos\theta)^{1/2}\, d\theta =$$
$$= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = 8a$$

$$4a\bar{x} = \sqrt{2}a^2\int_0^\pi (1+\cos\theta)\cos\theta\,(1+\cos\theta)^{1/2}\, d\theta = 4a^2\int_0^\pi \cos^3\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$
$$= 4a^2\int_0^\pi \left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a^2\int_0^\pi \left(2\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2} - 3\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + 1\right)\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$
$$= 4a^2\left(\frac{4}{5}\operatorname{sen}^5\frac{\theta}{2} - 2\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi = 4a^2\,\frac{4}{5}; \quad \therefore \; \bar{x} = \frac{4}{5}a$$

Habríamos podido aprovechar la simetría de la figura y escribir $M_y = 2\int_0^\pi r\cos\theta\, ds$ como $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$, que es verdadera únicamente para $0 < \theta < \pi$. Por simetría, se tiene que $\bar{y} = 0$ o $M_x = \sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^{3/2}\operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0$.

Problema 15-23 Halle el centroide del área limitada por un pétalo de la curva $r = a\cos n\theta$, desde $\theta = -\frac{\pi}{2n}$ a $\theta = \frac{\pi}{2n}$.

Solución. En el Ejercicio 5 del Capítulo 16 se demuestra que su área es $\frac{\pi a^2}{4n}$. Por simetría, $\bar{y} = 0$.

$$\frac{\pi a^2}{4n}\bar{x} = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} \cos^3 n\theta\cos\theta\, d\theta; \; \cos^3 n\theta\cos\theta = \cos^2 n\theta\cos n\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cos^2 n\theta\,[\cos(n+1)\theta +$$
$$+ \cos(n-1)\theta] = \frac{1}{4}\cos n\theta\,[\cos(2n+1)\theta + 2\cos\theta + \cos(2n-1)\theta] =$$
$$= \frac{1}{8}[\cos(3n+1)\theta + 3\cos(n+1)\theta + 3\cos(n-1)\theta + \cos(3n-1)\theta]$$

$$\frac{\pi a^2}{4n}\,\bar{x} = \frac{a^3}{24}\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} [\cos(3n+1)\theta + 3\cos(n+1)\theta + 3\cos(n-1)\theta + \cos(3n-1)\theta]\,d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{24}\left[\frac{\operatorname{sen}(3n+1)\theta}{3n+1} + \frac{3\operatorname{sen}(n+1)\theta}{n+1} + \frac{3\operatorname{sen}(n-1)\theta}{n-1} + \frac{\operatorname{sen}(3n-1)\theta}{3n-1}\right]_{-\pi/2n}^{\pi/2n} =$$

$$= \frac{a^3}{12}\left[\frac{1}{3n+1}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{n+1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{3}{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{1}{3n+1}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)\right] =$$

$$= \frac{a^3}{12}\cos\frac{\pi}{2n}\left(-\frac{1}{3n+1} + \frac{3}{n+1} + \frac{3}{n-1} - \frac{1}{3n-1}\right) = \frac{4a^3n^3}{(n^2-1)(9n^2-1)}\cos\frac{\pi}{2n}$$

$$\therefore\quad \bar{x} = \frac{16an^4}{\pi(n^2-1)(9n^2-1)}\cos\frac{\pi}{2n};\ \lim_{n\to\infty}\bar{x} = \frac{16a}{9\pi}$$

Problema 15-24 Halle el momento del volumen comprendido en el primer octante del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ con respecto al plano xy. Halle el centroide. (Vea. Fig. 15-17.)

Solución. Empleando láminas paralelas al plano xy, el área de una de ellas es $\frac{\pi a_i b_i}{4}$.

$$M_{xy} = \int_0^c zA(z)\,dz$$

Cuando $y = 0$, $x = a_i$, $a_i = a\sqrt{1 - \frac{z_i^2}{c^2}}$; $b_i = b\sqrt{1 - \frac{z_i^2}{c^2}}$,

$$M_{xy} = \frac{\pi ab}{4}\int_0^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z\,dz = -\frac{\pi ab}{4}\cdot\frac{c^2}{4}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2\Big|_0^c = \frac{\pi abc^2}{16}$$

En forma análoga se puede hallar que

$$M_{yz} = \frac{\pi a^2bc}{16};\ M_{xz} = \frac{\pi ab^2c}{16};\ v = \frac{\pi abc}{6};\ \bar{x} = \frac{3}{8}a;\ \bar{y} = \frac{3}{8}b;\ \bar{z} = \frac{3}{8}c$$

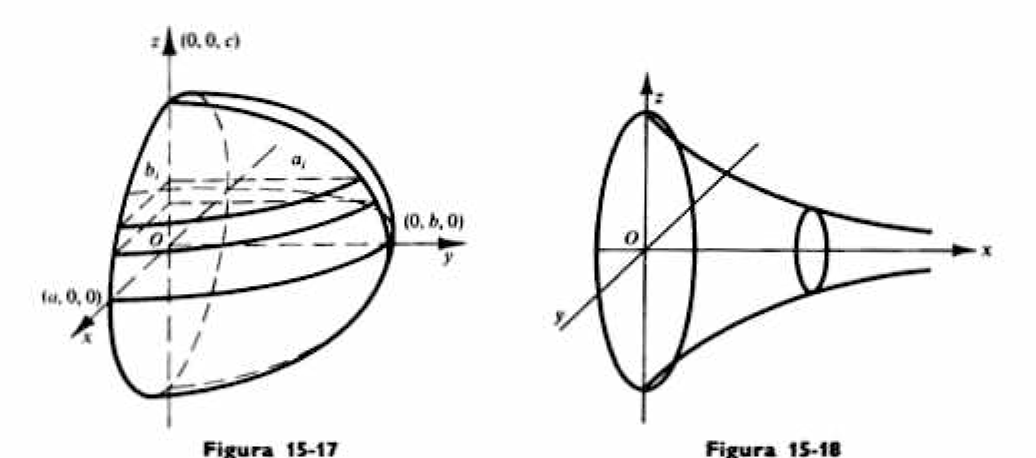


Figura 15-17 Figura 15-18

Problema 15-25 Halle el momento con relación al plano xy del volumen generado al hacer girar el área del primer cuadrante determinada por $y = e^{-x}$ y el eje X, alrededor del eje X. (Vea Fig. 15-18.)

Solución. $A(x) = \pi y^2$.

$$M_{yz} = \pi \int_0^\infty xy^2\,dx = \pi \int_0^\infty xe^{-2x}\,dx = \pi\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

$$M_{xz} = M_{xy} = 0;\ V = \int_0^\infty \pi e^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad \bar{x} = \frac{1}{2} \text{ y el centroide es } \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

Problema 15-26 Halle el centroide del sólido limitado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z = 0$, $z = c$. (Vea Fig. 15-19.)

Solución. Por simetría, $M_{xz} = M_{yz} = 0$; $M_{xy} = \int_0^c zA(z)\,dz$.

El área de una sección elíptica transversal es $\pi a_i b_i$ con $a_i = a\sqrt{1 + \frac{z_i^2}{c_i^2}}$; $b_i = b\sqrt{1 + \frac{z_i^2}{c_i^2}}$.

$$M_{xy} = \pi ab \int_0^c \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) z\,dz = \pi ab\left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4c^2}\right)\Big|_0^c = \frac{3}{4}\pi abc^2$$

$$V = \pi ab \int_0^c \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab\left(z + \frac{z^3}{3c^2}\right)\Big|_0^c = \frac{4}{3}\pi abc. \quad \therefore\ \bar{z} = \frac{9}{16}c$$

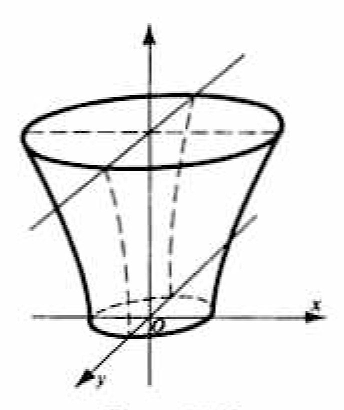


Figura 15-19

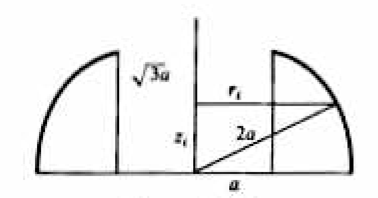


Figura 15-20

Problema 15-27 Halle el centroide de la parte de $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ que está por encima del plano xy.

Solución. En este caso, $\bar{x} = \bar{y} = 0$; $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3} - z_i^{2/3}$ para cualquier z_i.

Además, $A(z_i) = \frac{3}{8}\pi(c^{2/3} - z_i^{2/3})^3$.

$$M_{xy} = \frac{3\pi}{8}\int_0^c (c^2 - 3c^{4/3}z^{2/3} + 3c^{2/3}z^{4/3} - z^2)\,z\,dz = \frac{3\pi}{8}\left(\frac{c^2z^2}{2} - \frac{9}{8}c^{4/3}z^{8/3} + \frac{9}{10}c^{2/3}z^{10/3} - \frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^c = \frac{3\pi c^4}{320}$$

$$V = \frac{3\pi}{8}\int_0^c (c^2 - 3c^{4/3}z^{2/3} + 3c^{2/3}z^{4/3} - z^2)\,dz = \frac{3\pi}{8}\left(c^2z - \frac{9}{5}c^{4/3}z^{5/3} + \frac{9}{7}c^{2/3}z^{7/3} - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^c = \frac{6\pi}{105}c^3$$

$$\therefore\quad \bar{z} = \frac{21c}{128}$$

Problema 15-28 A la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, que está por encima del plano xy, se le hace un hueco cilíndrico de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Halle el centroide del volumen restante. (Vea Fig. 15-20.)

Solución. $\bar{x} = \bar{y} = 0$. $A(z_i) = \pi r_i^2 - \pi a^2 = \pi(4a^2 - z_i^2) - \pi a^2 = \pi(3a^2 - z_i^2)$.

$$M_{xy} = \pi \int_0^{\sqrt{3}a} (3a^2 - z^2)\, z\, dz = -\frac{\pi}{4}(3a^2 - z^2)^2 \Big|_0^{\sqrt{3}a} = \frac{9}{4}\pi a^4$$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}a} (3a^2 - z^2)\, dz = \pi\left(3a^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}a} = 2\pi\sqrt{3}a^3. \quad \therefore \quad \bar{z} = \frac{3\sqrt{3}a}{8}$$

Problema 15-29 Halle el centroide de la superficie generada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ cuando se hace girar alrededor del eje X.

Solución. $\bar{y} = \bar{z} = 0$.

$$N_{yz} = \int_0^{2\pi} x \cdot 2\pi y\, ds = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (\theta - \operatorname{sen}\theta)(1 - \cos\theta)\sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 2\pi\sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} \theta(1 - \cos\theta)^{3/2}\, d\theta + 2\pi\sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^{3/2}(-\operatorname{sen}\theta)\, d\theta =$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \theta \operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\, d\theta - 2\pi\sqrt{2}a^3 \frac{2}{5}(1 - \cos\theta)^{5/2}\Big|_0^{2\pi} = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \theta\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= 8\pi a^3\left[\theta\left(-2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} - 8\pi a^3 \int_0^{2\pi}\left(-2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$= 8\pi\left(2\pi\frac{4}{3}\right)a^3 - 8\pi a^3\left[-4\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \frac{2}{3}\left(2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{64\pi^2 a^3}{3}$$

$$A = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)\sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8\pi a^2\left(-2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{64\pi}{2}a^2. \qquad \therefore \quad \bar{x} = \pi a$$

Problema 15-30 Halle el momento de inercia con relación a cada uno de los ejes del área limitada por $y = e^{-x}$ y el eje X en el primer cuadrante.

Solución. $I_x = \int_0^1 y^2 x\, dy = -\int_0^1 y^2 \ln y\, dy = \left(-\frac{y^3}{3}\ln y + \frac{y^3}{9}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{9}$.

$$I_y = \int_0^{+\infty} x^2 y\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx = (-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = 2$$

Como $A = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$; $I_x = \frac{A}{9}$; $I_y = 2A$.

Problema 15-31 Halle el momento de inercia con respecto al eje X del área limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$.

Solución. Un elemento de área está dado por $(x_{2\pi-\theta} - x_\theta)\Delta y = [a(2\pi - \theta - \operatorname{sen}(2\pi - \theta) - a(\theta - \operatorname{sen}\theta)]\Delta y = a(2\pi - 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta)\Delta y$.

$$I_x = \int y^2\, dA = a^4 \int_0^{\pi} (1 - \cos\theta)^2(2\pi - 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{a^4}{3}(1 - \cos\theta)^3(2\pi - 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2a^4}{3}\int_0^{\pi}(1 - \cos\theta)^3(\cos\theta - 1)\, d\theta = \frac{2a^4}{3}\int_0^{\pi}\left(16\operatorname{sen}^8\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \frac{64a^4}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^8 u\, du$$

Empleando los resultados del Problema 6-11,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 u\,du = \left(-\frac{\operatorname{sen}^7 u\cos u}{8} - \frac{7}{8\cdot 6}\operatorname{sen}^5 u\cos u - \frac{7\cdot 5}{8\cdot 6\cdot 4}\operatorname{sen}^3 u\cos u - \right.$$
$$\left. - \frac{7\cdot 5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\operatorname{sen} u\cos u + \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}u\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

Ahora $I_x = \frac{35}{12}\pi a^4$, y como $A = 3\pi a^2$, entonces $I_x = \frac{35}{36}a^2 A$.

Problema 15-32 Halle el momento de inercia del área $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con respecto al eje X.

Solución. $I_x = \int y^2\,dA = \int_{-b}^{b} y^2\cdot 2x\,dy = 2a\int_{-b}^{b} y^2\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\,dy$. Sea $y = b\operatorname{sen}\theta$; entonces

$$I_x = 2ab^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\,d\theta = 2ab^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta =$$
$$= \frac{2ab^3}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta = \frac{ab^3}{4}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi ab^3}{4} = A\frac{b^2}{4}$$

Problema 15-33 Halle el momento de inercia del arco semicircular de $x^2 + y^2 = a^2$, situado por encima del eje X con respecto al mismo eje.

Solución. $I_x = \int_0^{s} y^2\,ds = \int_0^{a} y^2\sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)^2 + 1}\,dy = a\int_0^{a}\frac{y^2\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$.

Sea $y = a\operatorname{sen}\theta$.

$$I_x = a^3\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} = a^3\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{a^3}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{4} = s\,\frac{a^2}{4}$$

Problema 15-34 *a*) Halle el momento de inercia de un arco de la cicloide $x = a(1-\cos\theta)$, $y = as(1-\cos\theta)$ con respecto al eje X. *b*) Halle el momento de inercia del área limitada por $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi$ con respecto al eje Y.

Solución. *a*) $I_x = \int y^2\,ds = a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^{5/2}\,d\theta =$ $= 8a^3\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^5\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a^3\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2} + \cos^4\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a^3\left(-2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{4}{3}\cos^3\frac{\theta}{2} - \frac{2}{5}\right.$ $\left.\cos^5\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{256}{15}a^3$; $s = 8a$; $I_x = \frac{32}{15}sa^2$.

b) $I_y = \int x^2\,dA = \int_0^{\pi} x^2 y\,dx = \int_0^{\pi} x^2\operatorname{sen} x\,dx = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = (-x^2\cos x +$ $+ 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x)\Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 4$.

$$I_x = \int y^2\,dA = \int_0^{1} y^2(\pi - 2x)\,dy = \int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}^2 x)(\pi - 2x)\cos x\,dx = \frac{(\pi-2x)}{3}\operatorname{sen}^3 x\Big|_0^{\pi/2} +$$
$$+ \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx = \frac{2}{3}\left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4}{9}$$

$$A = \int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx = 2;\ I_x = \frac{2}{9}A;\ I_y = \frac{\pi^2 - 4}{2}A$$

Problema 15-35 Halle el momento de inercia con respecto al eje X del volumen generado cuando el área limitada por $y = e^{-x}$, en el primer cuadrante, se hace girar alrededor del eje X.

Solución.
$$I_x = 2\pi \int_0^1 y^3 x\, dy = -2\pi \int_0^1 y^3 \ln y\, dy = \left(-\frac{2\pi}{4} y^4 \ln y + \frac{2\pi}{16} y^4\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{16}$$
$$V = \pi \int_0^\infty y^2\, dx = \pi \int_0^\infty e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}\pi e^{-2x}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Problema 15-36 Halle el momento de inercia con respecto al eje X del volumen generado cuando la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ se hace girar alrededor del eje X, $x = 0$, $x = 2\pi$.

Solución. Empleando discos, se tiene que $I_x = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} y^4\, dx = \frac{\pi}{2} a^5 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^4(1 - \cos\theta)\, d\theta =$
$= \frac{\pi}{2} a^5 \int_0^{2\pi} 2^5 \operatorname{sen}^{10} \frac{\theta}{2}\, d\theta.$

$$I_x = 32\pi a^5 \int_0^\pi \operatorname{sen}^{10} u\, du = 32\pi a^5 \left(-\frac{1}{10}\operatorname{sen}^9 u \cos u - \frac{9}{10\cdot 8}\operatorname{sen}^7 u \cos u - \frac{9\cdot 7}{10\cdot 8\cdot 6}\operatorname{sen}^5 u \cos u -\right.$$
$$\left. - \frac{9\cdot 7\cdot 5}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}\operatorname{sen}^3 u \cos u - \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\operatorname{sen} u \cos u + \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} u\right)\Big|_0^\pi = \frac{63}{8}\pi^2 a^5 = \frac{63}{40} a^2 V$$

Problema 15-37 Halle el momento de inercia con respecto al eje de revolución del volumen generado cuando $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se hace girar alrededor del eje X.

Solución. Empleando discos,
$$I_x = \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{a} y^4\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{a} b^4\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi}{2} b^4\left(x - \frac{2x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{\pi}{2} ab^4\left(\frac{16}{15}\right) = \frac{8\pi ab^4}{15}$$

Problema 15-38 Halle el momento de inercia con respecto al eje X de la superficie generada cuando se hace girar un arco de la cicloide $x = a(1 - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, alrededor del eje X.

Solución.
$$I_x = 2\pi \int y^3\, ds = 2\sqrt{2}\pi a^4 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^{7/2}\, d\theta = 32\pi a^4 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^7 \frac{\theta}{2}\, d\theta =$$
$$= 32\pi a^4 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos^2\frac{\theta}{2} + 3\cos^4\frac{\theta}{2} - \cos^6\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$
$$= 32\pi a^4 \left(-2\cos\frac{\theta}{2} + 2\cos^3\frac{\theta}{2} - \frac{6}{5}\cos^5\frac{\theta}{2} + \frac{2}{7}\cos^7\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 32\pi a^4\cdot\frac{64}{35} = \frac{2048\pi a^4}{35} = \frac{96}{35} a^2 A$$

Problema 15-39 Halle el momento de inercia con respecto al eje de giro cuando $y = \sqrt{x}$ se hace girar alrededor del eje X de $x = 0$ a $x = 2$.

Solución.
$$I_x = 2\pi \int_0^2 y^3\, ds = 2\pi \int_0^2 x^{3/2}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx =$$
$$= 2\pi\left(x\cdot\frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right)^{3/2} - \frac{4}{15}\left(x + \frac{1}{4}\right)^{5/2}\right)\Big|_0^2 = \frac{149\pi}{30}$$
$$A = 2\pi \int_0^2 y\, ds = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx = \frac{4}{3}\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{13\pi}{3}$$
$$\therefore\ I_x = \frac{149}{130} A$$

Problema 15-40 La cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ se hace girar alrededor de la recta que pasa por O. Halle el volumen generado. (Vea Fig. 15-21.)

Solución. Se elige como elemento de volumen el tubo cónico determinado por el elemento de área que se muestra. El volumen del tubo cónico se puede hallar empleando el teorema de Pappus. Entonces $PM = r \operatorname{sen}\theta$, y TL, la distancia del centroide a la recta, por semejanza de triángulos, es $\frac{2}{3} r \operatorname{sen}\theta$.

$$\Delta V = 2\pi\bar{y}\Delta A = \Delta A \frac{4}{3}\pi r \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}\pi r^3 \operatorname{sen}\theta\,\Delta\theta$$

$$V = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{2}{3}\pi a^3 \frac{(1 + \cos\theta)^4}{4}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3$$

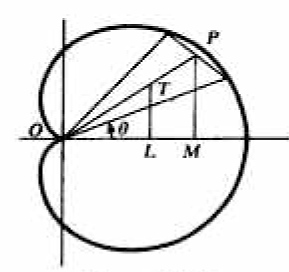
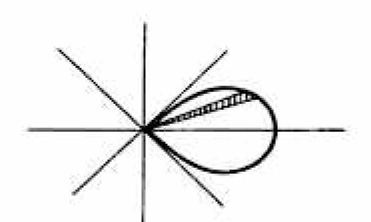


Figura 15-21


Figura 15-22

Problema 15-41 Halle el volumen generado cuando un pétalo de la curva $r = \cos 2\theta$ de $\theta = -\frac{\pi}{4}$ a $\theta = \frac{\pi}{4}$ se hace girar alrededor de la recta que muestra la Figura 15-22.

Solución. De nuevo, el radio del centroide es $\frac{2}{3} r \operatorname{sen}\theta$.

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} r^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} (2\cos^2\theta - 1)^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} (8\cos^6\theta - 12\cos^4\theta + 6\cos^2\theta - 1)\operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(-\frac{8}{7}\cos^7\theta + \frac{12}{5}\cos^5\theta - 2\cos^3\theta + \cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(-\frac{1}{7\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{8}{7} - \frac{12}{5} + 2 - 1\right) = \left(\frac{16\sqrt{2}}{105} - \frac{6}{35}\right)\pi$$

Problema 15-42 Empleando el teorema de Pappus, halle el centroide del arco semicircular de $x^2 + y^2 = a^2$ por encima del eje X.

Solución. Por simetría, sabemos que $\bar{x} = 0$. El área generada al hacer girar el arco alrededor del eje X es $4\pi a^2$; la longitud del arco es πa.

Empleando el teorema de Pappus, $A = 2\pi\bar{y}s$; $4\pi a^2 = 2\pi\bar{y}\pi a$; $\bar{y} = \frac{2a}{\pi}$.

Problema 15-43 Un alambre delgado y homogéneo se dobla para que forme un semicírculo de radio r. Halle el centro de masa.

Solución. $dm = \rho\, ds$, ds es un elemento de arco del alambre y $\rho = \frac{M}{L} = \frac{M}{\pi r}$ es la masa por unidad de longitud del alambre. En términos del ángulo central θ se tiene que $ds = r d\theta$ y $\bar{x} = r\cos\theta$, $\bar{y} = r \operatorname{sen}\theta$. Entonces

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\pi r\cos\theta\, \rho r\, d\theta}{\int_0^\pi \rho r\, d\theta} = \frac{\rho r^2 \Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_0^\pi}{\rho r \Big[\theta\Big]_0^\pi} = 0;\ \bar{y} = \frac{\int_0^\pi r\operatorname{sen}\theta\, \rho r\, d\theta}{\int_0^\pi \rho r\, d\theta} = \frac{\rho r^2 \Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi}{\rho r \Big[\theta\Big]_0^\pi} = \frac{2}{\pi} r$$

El centro de masa está sobre el eje Y a una distancia $2/\pi$, medida desde el origen hasta la intersección $(0, r)$.

Problema 15-44 Halle el centro de masa de un hemisferio sólido de radio r si su densidad en cualquier punto P es proporcional a la distancia de P a la base del hemisferio.

Solución. El hemisferio se descompone en discos de espesor dy por planos perpendiculares al eje Y y se toma $dm = \rho\, dV$ con $dV = A(y)\, dy$, que es el volumen de un disco situado a una distancia y por encima de la base del hemisferio, que es el plano xz, y donde $\rho = ky$ (k = cte.). ρ es la densidad del sólido en el disco. El área de la cara del disco es $A(y) = \pi x^2$, con $x^2 + y^2 = r^2$, es decir, $dV = A(y)\, dy = \pi(r^2 - y^2)\, dy$; $\therefore\ dm = k\pi(r^2 - y^2)y\, dy$. El centro de masa del disco se puede tomar como su centro geométrico, es decir, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, y, 0)$; $\therefore\ \bar{x} = \bar{z} = 0$ y

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^r k\pi(r^2 - y^2)y^2\, dy}{\int_0^r k\pi(r^2 - y^2)y\, dy} = \frac{k\pi\left[\frac{r^2y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^r}{k\pi\left[\frac{r^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^r} = \frac{8}{15} r$$

Problema 15-45 Halle el centroide de un cascarón esférico de radio interior r y espesor t.

Solución. Sean M_1, M_2 y M; V_1, V_2 y V representan, respectivamente, los momentos con respecto al plano xz y los volúmenes del hemisferio sólido de radio r; el hemisferio sólido de radio $r + t$ y el cascarón esférico de espesor t y radio interior r. Como el momento de la suma de dos masas es la suma de sus momentos, y $V_1 + V = V_2$, se tiene que $M_1 + M = M_2$ o $M_1 = M_2 - M$. Según el problema anterior,

$$M_2 = \frac{\pi}{4}(r + t)^4,\ M_1 = \frac{\pi}{4}r^4,\ \therefore\ M = \frac{\pi}{4}[(r + t)^4 - r^4] = \frac{\pi}{4}[4r^3t + 6r^2t^2 + 4rt^3 + t^4] \text{ y}$$

$$V = V_2 - V_1 = \frac{2}{3}\pi[(r + t)^3 - r^3] = \frac{2}{3}\pi(3r^2t + 3rt^2 + t^3),\ \therefore\ \bar{y} = \frac{M}{V} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(r^3 + \frac{3}{2}r^2t + rt^2 + \frac{1}{4}t^3\right)}{\left(r^2 + rt + \frac{1}{3}t^2\right)}$$

Problema 15-46 Halle el centro de gravedad del área de un semicírculo.

Solución. Se genera una esfera al hacer girar el semicírculo alrededor de su diámetro. Entonces el eje de rotación no intercepta el área; por tanto, se puede aplicar el primer teorema de Pappus.

$$\text{Como } A = \frac{1}{2}\pi r^2 \text{ y } V = 2\pi\bar{y}A \Rightarrow \bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi\cdot\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{4}{3\pi} r.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle el centroide de las siguientes figuras planas: *a)* un rectángulo; *b)* un semicírculo; *c)* la región limitada por la curva $x = 2\cos t - \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$; *d)* el rectángulo con vértices $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, 2)$ combinado con un triángulo con vértices en $(\pm 1, 2)$ y $(0, 3)$.

Resp.: *a)* En el punto donde se cortan las diagonales; *b)* sobre el radio perpendicular al diámetro a una distancia $\frac{4a}{3\pi}$ del diámetro; *c)* $(0,0)$; *d)* $(0, 19/15)$.

2. Halle el momento de inercia con relación a la recta indicada: *a)* un triángulo rectángulo alrededor de un lado; *b)* un semicírculo alrededor de su diámetro; *c)* un sector circular de radio a y ángulo θ alrededor de su bisectriz; *d)* un rectángulo alrededor de su diagonal.

Resp.: *a)* M_0h^2/b, h la altura sobre el lado; *c)* $M_0a^2(2\beta - \operatorname{sen} 2\beta)/8\beta$.

3. Empleando el teorema de Pappus calcule: *a)* el volumen de un toro; *b)* el área de un toro.

Resp.: *a)* $2\pi^2a^2b$; *b)* $4\pi^2ab$

4. Halle el centroide del sólido de revolución especificado: *a)* un hemisferio; *b)* el sólido obtenido al hacer girar la región limitada por $y = a^2 - x^2$, $0 \le x \le a$ alrededor del eje X.

Resp.: *a)* $(0, 2a/\pi)$; *b)* $(0, -2/\pi)$

5. Halle el centroide de una pirámide cuadrada, rectangular.

Resp.: A 1/4 de la base sobre la altura

6. Halle los momentos estáticos respecto a los ejes coordenados y las coordenadas del centro de gravedad del triángulo limitado por las rectas $x + y = a$, $x = 0$ y $y = 0$.

Resp.: $M_x = M_y = \frac{a^3}{6}$; $\bar{x} = \bar{y} = \frac{a}{3}$

7. Halle el momento estático de la circunferencia $r = 2a \operatorname{sen} \theta$ respecto al eje polar.

Resp.: $2\pi a^2$

8. Halle las coordenadas del centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$ comprendido entre $x = -a$ y $x = a$.

Resp.: $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = \frac{a}{4}\,\frac{2 + \operatorname{senh} 2}{\operatorname{senh} 1}$

9. Halle las coordenadas del centro de gravedad del arco de circunferencia, de radio a, que subtiende el ángulo 2α.

Resp.: $\bar{x} = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$; $\bar{y} = 0$

10. Halle las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Resp.: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{9}{20}$

11. Halle el centro de gravedad de un cono circular recto, homogéneo, si el radio de la base es r y la altura es h.

Resp.: A $\frac{3}{4}$ de la altura, a partir del vértice del cono

12. Halle el momento de inercia de un segmento parabólico recto, respecto a su eje de simetría, si la base es $2b$ y la altura h.

Resp.: $I = \frac{4}{15} hb^3$

13. Halle el momento de inercia de un cono circular recto, homogéneo, respecto a su eje, si el radio de la base es R y la altura H.

Resp.: $I = \frac{1}{10} \pi R^4 H\rho$

14. *a)* Halle el centro de gravedad del semicírculo aplicando el teorema de Pappus. *b)* Aplicando el teorema de Pappus demuestre que el centro de gravedad de un triángulo dista de su base a un tercio de la altura.

Resp.: *a)* $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi}$

CAPITULO 16

Coordenadas polares

La posición de un punto P en el plano se puede indicar mediante coordenadas polares que se definen de la siguiente manera:

Como muestra la Figura 16-1, sea l una semirrecta fija, llamada eje polar, de origen O, que se llama polo. Sea $r = |OP|$ la distancia entre O y P, y θ el ángulo que forman l y OP, medido desde l hacia P en sentido contrario a las manecillas del reloj. Entonces decimos que el punto P tiene por coordenadas polares a r y θ, y escribimos $P = (r,\theta)$.

Dado un par (r,θ), el punto con coordenadas polares r y θ es único. Por otra parte, las coordenadas polares de un punto P no son únicas, como sucede con sus coordenadas rectangulares, puesto que no existe un único ángulo entre OP y la dirección positiva de l. En realidad, si $P = (r,\theta)$, entonces $P = (r,\theta \pm 360°)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

Si $r = 0$, θ es indeterminado. Así el polo 0 tiene por coordenadas $(0,\theta)$, θ arbitrario.

Nota. Por ser r una distancia, es positiva; pero a veces es conveniente que r tome valores negativos. Esto se logra definiendo $P = (-r,\theta)$ como el simétrico respecto al origen del punto $P' = (r,\theta)$.

Las coordenadas polares, cuando se acepta que r sea positiva o negativa, se llaman generalizadas.

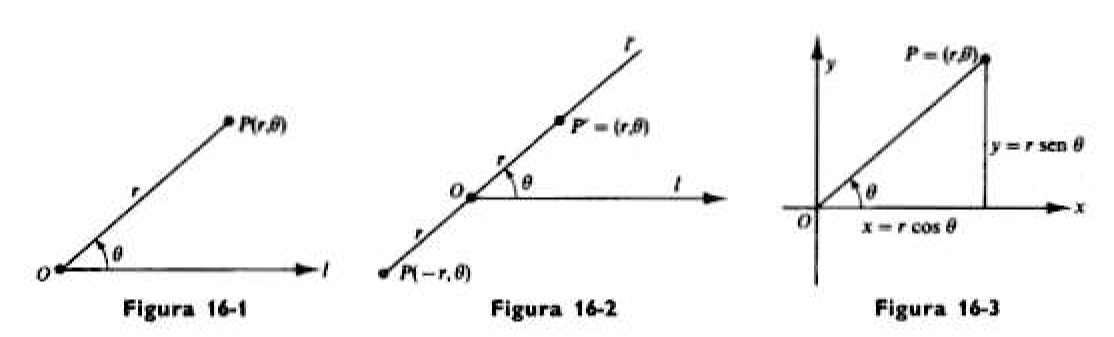


Figura 16-1 Figura 16-2 Figura 16-3

La Figura 16-2 muestra que si $P = (-r,\theta)$, entonces $P = (r,\theta + 180°)$.

La Figura 16-3 muestra la relación que existe entre las coordenadas rectangulares y las polares. En efecto,

$$x = r\cos\theta;\ y = r\,\text{sen}\,\theta,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \text{tg}\,\theta = x/y,\ x \neq \theta$$

Estas fórmulas permiten pasar de un sistema al otro.

Area en coordenadas polares

El área de un sector circular de ángulo central θ (en radianes) y radio r es $\frac{1}{2}r^2\theta$. Sea C la curva de ecuación $r = F(\theta)$ en coordenadas polares, $F(\theta)$ no negativa y continua para $\theta \in [\alpha, \beta]$, $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$). Sea S el conjunto de puntos del plano de coordenadas polares (r, θ) y que satisfacen $\theta \in [\alpha, \beta]$ y $r \in [0, F(\theta)]$. Vea la Figura 16-4.

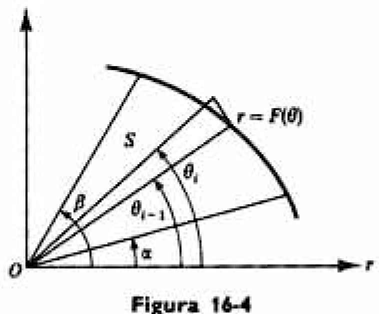


Figura 16-4

Sea $P = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n\}$ una partición de $[\alpha, \beta]$ y defina

$$m_i(F) = \sup\{F(\theta) : \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\}$$
$$M_i(F) = \inf\{F(\theta) : \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\}$$

El sector circular de θ_{i-1} a θ_i de radio $m_i(F)$ está en el interior de S y el sector de radio $M_i(F)$ se extiende hacia afuera. Entonces

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2(F)(\theta_i - \theta_{i-1}) \leq \text{área } (S) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2(F)(\theta_i - \theta_{i-1})$$

Ahora, como $F(\theta) \geq 0$, para $\theta \in [\alpha, \beta]$

$$m_i^2(F) = \sup\{F^2(\theta) : \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\} = m_i(F^2)$$
$$M_i^2(F) = \inf\{F^2(\theta) : \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\} = M_i(F^2)$$

y $\frac{1}{2}I(F^2, P) \leq$ área $(S) \leq \frac{1}{2}S(F^2, P)$. Entonces, como F^2 es continua y, por tanto, integrable,

$$\therefore \text{ área } (S) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} F^2(\theta)d\theta$$

Longitud de arco

Si $r = f(\theta)$ representa una función en coordenadas polares, entonces la longitud de arco está dada por la expresión

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$$

Volumen de un sólido de revolución

Sea $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. El volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar esta área alrededor del eje X está dado por

$$\pi\int_{\beta}^{\alpha} f^2(\theta)\,\text{sen}^2\,\theta[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\text{sen}\,\theta]\,d\theta$$

Area de una superficie de revolución

Sea $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. El área de la superficie del sólido de revolución se obtiene por medio de la fórmula

$$2\pi\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\text{sen}\,\theta\left[[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2\right]d\theta$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 16-1 Dibuje el grafo de la función $r = 4\cos\theta$.

Solución. Como $\cos\theta$ es una función periódica de periodo 2π, es necesario considerar únicamente los valores de θ comprendidos entre 0 y 2π. Por ser la función par, el grafo es simétrico con respecto al eje polar y, por consiguiente, podemos restringirnos a valores entre 0 y π. La siguiente tabla muestra los valores de r para algunos valores de θ.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0	-2	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}$	-4

Dibujando estos puntos en papel de coordenadas polares y uniendo los puntos por una curva suave se obtiene la Figura 16-5, por ser la función continua sobre su dominio.

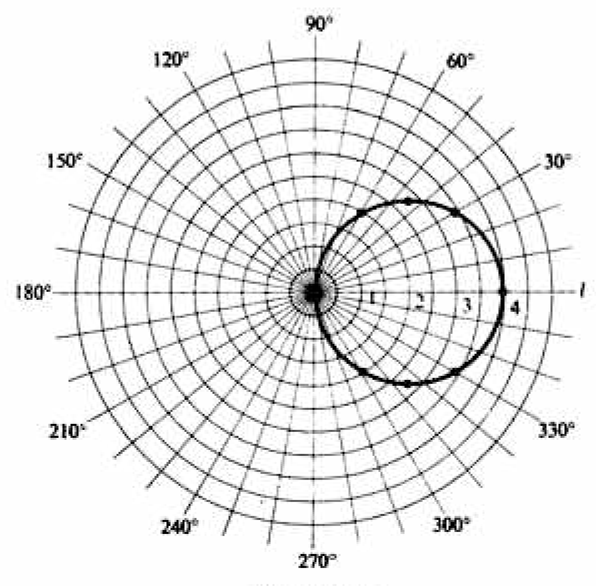


Figura 16-5

Problema 16-2 Dibuje el grafo de $r = 2(1 - \cos\theta)$.

Solución. La función es par y, por tanto, su grafo es simétrico con respecto al eje polar. La tabla de valores de r y θ es:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{2}$	1	2	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	4

Conectando los puntos por una curva suave y usando el hecho de que es simétrica y continua se obtiene el grafo, llamado cardioide, de la Figura 16-6.

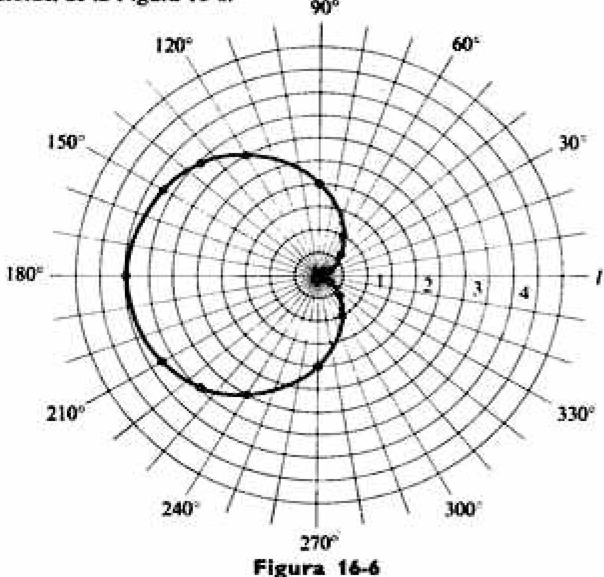


Figura 16-6

Problema 16-3 Dibuje el grafo de la curva $r = \cos 3\theta$ y halle el área de una de sus hojas.

Solución. La función es par y, por tanto, simétrica con respecto al eje polar. La tabla de valores de θ y r es:

θ	0	$+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
r	1	0	0	1	1	0

Como θ varia de 0 a $\frac{\pi}{6}$, 3θ varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Si $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces $\frac{\pi}{2} < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$ y $\cos 3\theta$ es negativo en este intervalo. Como $r = \cos 3\theta$ y $r \geq 0$, esto quiere decir que el intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ no pertenece al dominio de la función. Lo mismo sucede con los intervalos $\left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[$ y $\left]\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right[$. La derivada es $dr/d\theta = -3 \operatorname{sen} 3\theta$ e indica que en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, r es decreciente y creciente en $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$. Entonces el punto máximo en $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ es 0 y el mínimo se presenta en los puntos extremos $-\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{6}$. La curva se llama trébol. (Vea Fig. 16-7.)

El área de una de las hojas es $A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta\, d\theta = \frac{\pi}{12}$.

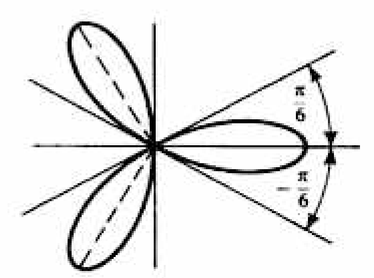


Figura 16-7

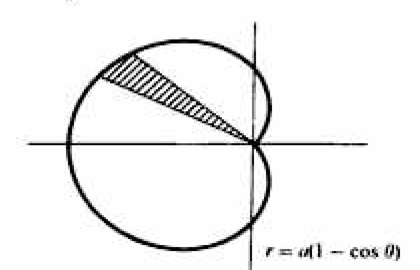


Figura 16-8

Problema 16-4 Halle el área limitada por la cardioide $r = 2(1 - \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Solución. $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$. Entonces

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4(1-\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4[(1-2\cos\theta)+\cos^2\theta]\,d\theta = \frac{1}{2}\left[4\theta - 8\operatorname{sen}\theta + 4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = 6\pi$$

Problema 16-5 Halle el área de la región rayada en la Figura 16-9, limitada por el eje polar y la primera vuelta de la espiral de Arquímedes $r = a\theta$.

Solución. En este caso, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ y $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{6}a^2\theta^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3$.

Nota. Observe que A es un tercio del área limitada por el círculo indicado, de radio $|OB| = 2\pi a$.

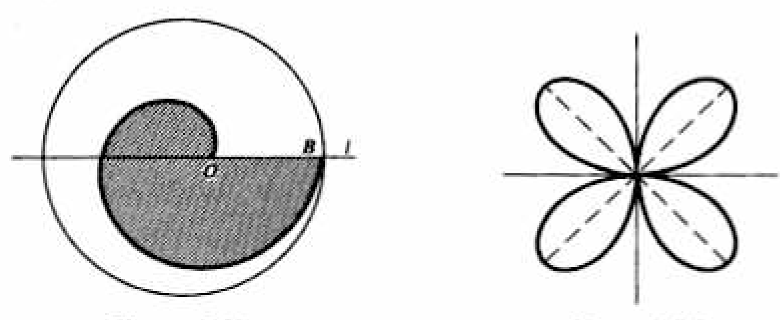


Figura 16-9

Figura 16-10

Problema 16-6 Halle el área de una hoja del grafo polar de $r = |4\operatorname{sen}2\theta|$. (Vea Fig. 16-10.)

Solución. Una hoja de la curva corresponde a $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Entonces

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 16\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2} d\theta - 4\int_0^{\pi/2}\cos 4\theta\,d\theta = 4\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi$$

Problema 16-7 Halle el área limitada por la curva $r^2 = \cos 2\theta$. (Vea Fig. 16-11.)

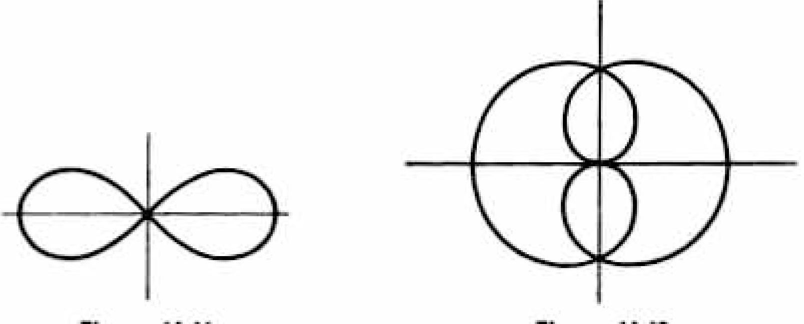


Figura 16-11

Figura 16-12

Solución. Es tentador escribir su área como $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta = 0.$

Sin embargo, se debe recordar que la integral es $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \cos 2\theta_i \Delta\theta_i$. Los θ_i comprendidos entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$, por ejemplo, contribuyen con términos de esta serie (si se divide el intervalo $]0, 2\pi[$ en n partes) y la curva no existe en $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ $\left(r^2 \text{ es negativo cuando } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\right)$ Entonces

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1$$

Problema 16-8 Halle el área limitada por la curva $r = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$.

Solución. Examinando los valores de θ entre 0 y 4π se obtiene el grafo que muestra la Figura 16-12. Si se integra de 0 a 4π se cubre el área de la figura interior en forma de 8, dos veces. La de la parte superior entre 0 y π y 3π y 4π se recorre dos veces, mientras que el área restante por encima del eje polar se recorre una vez. Entonces

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta - 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} (1 - \cos\theta)\, d\theta - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}(\theta - \operatorname{sen}\theta)\Big|_0^{4\pi} - (\theta - \operatorname{sen}\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \pi - \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$$

Problema 16-9 Halle el área comprendida entre las curvas

$$r = \frac{4}{1 - \cos\theta}, \; r = \frac{4}{1 + \cos\theta}$$

(Vea Fig. 16-13.)

Solución. $A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{16\, d\theta}{(1 + \cos\theta)^2} + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{16\, d\theta}{(1 - \cos\theta)^2} = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + 2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}} =$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta + 2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) \sec^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta +$$

$$+ 2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2}\right) \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} -$$

$$- 4\left(\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 \frac{\theta}{2}\right)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 4\left(2 + \frac{2}{3}\right) - 4\left(-2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{3}$$

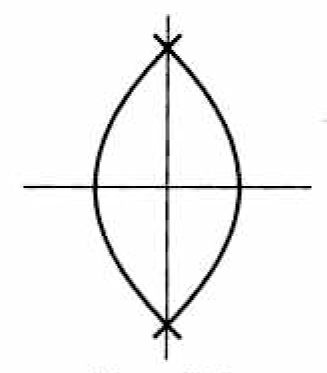


Figura 16-13

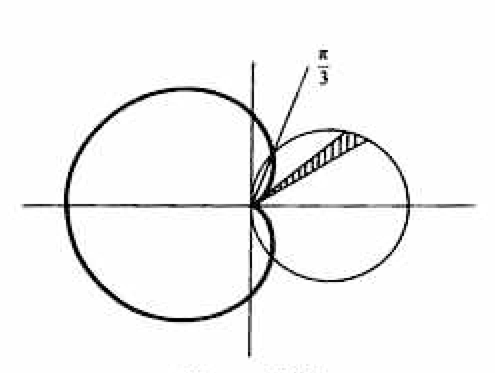


Figura 16-14

Problema 16-10 Halle el área comprendida en el interior del círculo $r = \cos\theta$ y por fuera de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$. (Vea Fig. 16-14.)

Solución. $dA = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\,d\theta$; $1 - \cos\theta = \cos\theta$ cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$ o $-\frac{\pi}{3}$.

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} [\cos^2\theta - (1 - \cos\theta)^2]\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2\cos\theta - 1)\,d\theta = \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta - \theta)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Problema 16-11 Muestre que la fórmula que da el área en coordenadas polares es compatible con la fórmula que determina el área en coordenadas rectangulares. (Vea Fig. 16-15.)

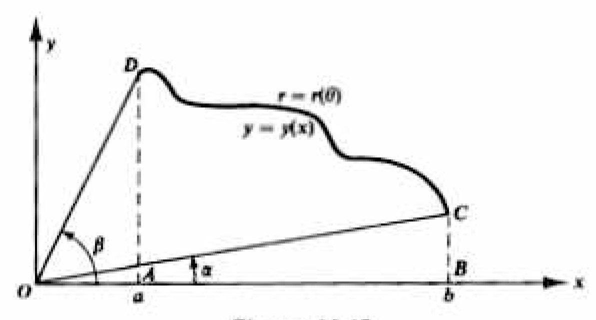


Figura 16-15

Solución. Suponga que la curva en forma polar $r = r(\theta)$ también tiene una representación de la forma $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Entonces hay dos expresiones que dan el área de la región $OBCD$; una igual a

$$\text{área}\,(\Delta OBC) + \text{área}\,(OCD) = \frac{1}{2}r^2(\alpha)\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + \text{área}\,(OCD);$$

la otra es igual a

$$\text{área}\,(\Delta OAD) + \text{área}\,(ABCD) = \frac{1}{2}r^2(\beta)\cos\beta\operatorname{sen}\beta + \int_a^b y\,dx$$

Entonces $\text{área}\,(OCD) = \int_a^b y\,dx + \frac{1}{2}r^2(\beta)\cos\beta\operatorname{sen}\beta - \frac{1}{2}r^2(\alpha)\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = \int_a^b y\,dx + \frac{1}{4}\Big[r^2(\theta)\operatorname{sen}2\theta\Big]_\alpha^\beta$ (1)

Pero $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\operatorname{sen}\theta$ y, por tanto,

$$\int_a^b y\,dx = \int_\beta^\alpha r(\theta)\operatorname{sen}\theta[r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\operatorname{sen}\theta]\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha r(\theta)r'(\theta)\operatorname{sen}2\theta\,d\theta - \int_\beta^\alpha r^2(\theta)\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_\beta^\alpha [r^2(\theta)]'\operatorname{sen}2\theta\,d\theta - \int_\beta^\alpha r^2(\theta)\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

Integrando por partes se obtiene

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{4}\Big[r^2(\theta)\operatorname{sen}2\theta\Big]_\beta^\alpha - \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha r^2(\theta)\cos 2\theta\,d\theta - \int_\beta^\alpha r^2(\theta)\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\Big[r^2(\theta)\operatorname{sen}2\theta\Big]_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)[\cos 2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta]\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\Big[r^2(\theta)\operatorname{sen}2\theta\Big]_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta \qquad (2)$$

Remplazando (2) en (1) se obtiene: $\text{área}\,(OCD) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$.

Longitud de arco

Problema 16-12 Determine la fórmula $L = \int_{\alpha}^{\beta} [[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2]^{1/2}\, d\theta$.

Solución. Remplazando θ por t en la fórmula $\int_{\alpha}^{\beta} \{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{1/2}$, se obtiene que $\int_{\alpha}^{\beta} \{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2\}^{1/2}\, d\theta$. Pero $x(\theta) = f(\theta)\cos\theta$; entonces $x'(\theta) = -f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta$ y $[x'(\theta)]^2 = [f(\theta)]^2 \text{sen}^2\theta - 2f(\theta)f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + [f'(\theta)]^2\cos^2\theta$. Por otra parte, $y(\theta) = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$; entonces $y'(\theta) = f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta$; entonces $[y'(\theta)]^2 = [f(\theta)]^2\cos^2\theta + 2f(\theta)f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + [f'(\theta)]^2\,\text{sen}^2\theta$. Por tanto,

$$[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 = [f(\theta)]^2(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + [f'(\theta)]^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2$$

Problema 16-13 *a*) Halle la longitud del arco determinado por $r = \text{sen}\,\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$.
b) Halle la longitud del arco determinado por $r = 2\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

Solución. *a*) $r = f(\theta) = \text{sen}\,\theta$; entonces $f'(\theta) = \cos\theta$ y $[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Por tanto, la longitud de arco es $\int_0^{\pi} d\theta = \pi$.

b) $r = f(\theta) = 2\theta$; entonces $f'(\theta) = 2$ y $[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 = 4\theta^2 + 4 = 4(1 + \theta^2)$. Por tanto, la longitud de arco es

$$\int_0^{2\pi} 2(1+\theta^2)^{1/2}\,d\theta = [\theta(1+\theta^2)^{1/2} + \ln(\theta + [1+\theta^2]^{1/2})]\Big|_0^{2\pi} = [2\pi(1+4\pi^2)^{1/2} + \ln(2\pi + [1+4\pi^2]^{1/2})]$$

Problema 16-14 Halle la longitud del arco determinado por $r = 1 + \cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

Solución. Como el grafo es simétrico se necesita únicamente calcular la longitud de arco desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$ y duplicarla. Ahora $f(\theta) = 1 + \cos\theta$, $f'(\theta) = -\text{sen}\,\theta$ y $[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 2 + 2\cos\theta = 2(1 + \cos\theta)$.

Entonces la longitud de arco es $2\int_0^{\pi} \sqrt{2}(1+\cos\theta)^{1/2}\,d\theta$. Pero $(1+\cos\theta)^{1/2} = \sqrt{2}\cos(\theta/2)$ para todo θ entre 0 y π. Entonces $L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\left[\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8$.

Problema 16-15 Halle la longitud de la espiral $r = a\theta$ entre 0 y 2π.

Solución. $L = a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta$. Sea $\theta = \text{tg}\,z$; entonces

$$L = a\int_0^{\text{arctg}\,2\pi}\sqrt{\text{tg}^2 z + 1}\,\sec^2 z\,dz = a\int_0^{\text{arctg}\,2\pi}\sec^3 z\,dz = \frac{a}{2}(\sec z\,\text{tg}\,z + \ln|\sec z + \text{tg}\,z|)\Big|_0^{\text{arctg}\,2\pi}$$

Según el triángulo [triángulo con hipotenusa $\sqrt{4\pi^2+1}$, cateto opuesto 2π, cateto adyacente 1, ángulo θ], $\text{arc tg}\,2\pi = \text{arc sec}\sqrt{4\pi^2 + 1}$.

$\therefore\quad L = \frac{a}{2}[2\pi(4\pi^2 + 1)^{1/2} + \ln|\sqrt{4\pi^2 + 1} + 2\pi|]$.

Problema 16-16 Halle la longitud de la cisoide $r = 2a\,\text{tg}\,\theta\,\text{sen}\,\theta$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/3$ (Vea Fig. 16-16.)

Solución. $dr/d\theta = 2a\,(\operatorname{sen}\theta \sec^2\theta + \operatorname{tg}\theta \cos\theta) = 2a \operatorname{sen}\theta\,(\sec^2\theta + 1)$. Entonces

$$L = 2a\int_0^{\pi/3} \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta(\sec^2\theta + 1)^2}\,d\theta = 2a\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + \sec^4\theta + 2\sec^2\theta + 1}\,d\theta =$$

$$= 2a\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta\sqrt{\sec^4\theta + 3\sec^2\theta}\,d\theta = 2a\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta\sec\theta\sqrt{\sec^2\theta + 3}\,d\theta = 2a\int_0^{\pi/3}\sqrt{\sec^2\theta + 3}\operatorname{tg}\theta\,d\theta$$

Sea $\sec^2\theta + 3 = u^2 \Rightarrow 2\sec^2\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta = 2u\,du$; $\operatorname{tg}\theta\,d\theta = \dfrac{u\,du}{u^2 - 3}$; $\theta = 0,\ u = 2$; $\theta = \dfrac{\pi}{3},\ u = \sqrt{7}$. Entonces

$$L = 2a\int_2^{\sqrt{7}} \frac{u^2\,du}{u^2 - 3} = 2a\int_2^{\sqrt{7}} du + 6a\int_2^{\sqrt{7}} \frac{du}{u^2 - 3} = 2a(\sqrt{7} - 2) + \sqrt{3}a\left(\ln\left|\frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}}\right|\right)_2^{\sqrt{7}} =$$

$$= 2a(\sqrt{7} - 2) + \sqrt{3}a\ln\left|\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}\cdot\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}\right| = 2a(\sqrt{7} - 2) +$$

$$+ \sqrt{3}a\ln\left|\frac{(7 + 3 - 2\sqrt{21})(4 + 3 + 4\sqrt{3})}{4\cdot 1}\right| = 2a(\sqrt{7} - 2) + \sqrt{3}a\ln\left[\frac{1}{2}(5 - \sqrt{21})(7 + 4\sqrt{3})\right]$$

Figura 16-16

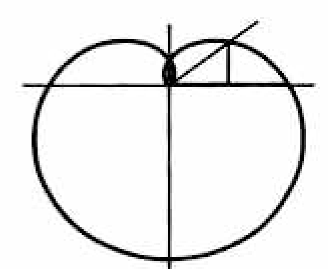


Figura 16-17

Problema 16-17 Halle la longitud de la curva $r = a\operatorname{sen}^3\dfrac{\theta}{3}$. (Vea Fig. 16-16.)

Solución. A medida que θ varía de 0 a $3\pi/2$, se recorre la mitad de la curva. Entonces

$$L = 2a\int_0^{3\pi/2}\sqrt{\operatorname{sen}^6\frac{\theta}{3} + \operatorname{sen}^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,d\theta = 2a\int_0^{3\pi/2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{3}\,d\theta = a\int_0^{3\pi/2}\left(1 - \cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta =$$

$$= a\left(\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\frac{2\theta}{3}\right)\Big|_0^{3\pi/2} = \frac{3\pi a}{2}$$

Problema 16-18 Determine la longitud de la lemniscata de Bernouilli, de ecuación $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$.

Solución. El grafo es simétrico; entonces

$$L = 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{(\rho\,d\theta)^2 + (d\rho)^2} = 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\theta + \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\,d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\,d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

Haciendo el cambio $\cos 2\theta = t^{1/2} \Rightarrow -2\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta = \dfrac{dt}{2}t^{-1/2}$, con $\operatorname{sen} 2\theta = \sqrt{1 - t}$; sustituyendo

$$L = 4\int_0^1 -\frac{t^{-1/4}t^{-1/2}}{4\sqrt{1 - t}}\,dt = \int_0^1 t^{-3/4}(1 - t)^{-1/2}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 5{,}26$$

Area de una superficie de revolución

Problema 16-19 Halle el área generada por la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ cuando se hace girar alrededor del eje polar.

Solución. $\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = a\sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = a\sqrt{2 + 2\cos\theta}$.

$$A = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta}\,(1 + \cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^\pi (1 + \cos\theta)^{3/2}\operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}a^2\left(-\frac{2}{5}\right)(1 + \cos\theta)^{5/2}\Big|_0^\pi = \frac{32\pi a^2}{5}$$

Problema 16-20 Halle el área generada cuando $r^2 = \cos 2\theta$ se hace girar alrededor del eje polar.

Solución. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{-\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$; $ds = \sqrt{\cos 2\theta + \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\, d\theta = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$

$$A = 2\cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} r\operatorname{sen}\theta\, ds = 4\pi\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -4\pi\cos\theta\Big|_0^{\pi/4} = 4\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2} - 1)$$

Problema 16-21 Halle el área generada cuando la curva $r = a\cos\theta$ se hace girar alrededor del eje Y.

Solución. El área que determina un elemento de arco es $2\pi r\cos\theta\, ds$. Entonces

$$A = 2\pi\int_0^\pi r\cos\theta\, ds = 2\pi\int_0^\pi a\cos^2\theta\sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = 2\pi a^2\int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^\pi\left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \pi a^2\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\Big|_0^\pi = \pi^2 a^2$$

Problema 16-22 Determine el volumen generado por la lemniscata de Bernouilli, de ecuación $\rho^2 = r^2\cos 2\theta$, cuando se la hace girar alrededor del eje polar.

Solución.
$$V = 2\pi\int_{\pi/4}^0 y^2\, dx = 2\pi\int_{\pi/4}^0 \rho^2\operatorname{sen}^2\theta(\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta)\, d\theta =$$

$$= 2\pi\int_{\pi/4}^0 r^2\cos 2\theta\operatorname{sen}^2\theta\left(-r\frac{\operatorname{sen} 2\theta\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} - r\sqrt{\cos 2\theta}\operatorname{sen}\theta\right)d\theta =$$

$$= -2\pi r^3\int_{\pi/4}^0 \cos 2\theta\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta + \cos 2\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\, d\theta =$$

$$= 2\pi r^3\left[\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\theta}\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen} 2\theta\cos\theta\, d\theta + \int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\theta}\operatorname{sen}^2\theta\cos 2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right]$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\theta}\operatorname{sen}^2 2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\theta}\operatorname{sen}^2 2\theta\sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}\, d\theta$$

que mediante el cambio $\cos 2\theta = t \Rightarrow -2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta = dt$ se transforma en:

$$I_1 = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int_1^0 \sqrt{t}(1 - t^2)\sqrt{1 - t}\, \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{t}\,\sqrt{1 - t^2}\,\sqrt{1 - t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^1 (1 - t)\sqrt{t(1 + t)}\, dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\left(-\frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{12}t + \frac{3}{8}\right)\sqrt{t + t^2} - \frac{3}{16}\int \frac{dt}{\sqrt{t + t^2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{11}{24} - \left[\frac{3}{16} \operatorname{arg\,cosh}(2t + 1)\right]_0^1\right] = \frac{11}{96\sqrt{2}} - \frac{3}{64\sqrt{2}} \ln(3 + \sqrt{8})$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\theta}\, \operatorname{sen}^2 \theta \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 \theta\, (\cos 2\theta)^{3/2}\, d\theta$$

que mediante el cambio $\cos 2\theta = t \Rightarrow -2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta = dt$, $d\theta = \dfrac{-dt}{2\sqrt{1 - t^2}}$. Entonces

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1 - t}{2}\right)^{3/2} t^{3/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{(1 - t)^{3/2} t^2\, dt}{\sqrt{(1 + t)(1 - t)t}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{(1 - t)t^2}{\sqrt{t^2 + t}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[-\frac{t^2}{3} + \frac{11t}{12} - \frac{11}{8} + \frac{11}{16} \operatorname{arg\,cosh}(2t + 1)\right]_0^1 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{-19}{24} + \frac{11}{16} \ln(3 + \sqrt{8})\right] =$$

$$= \frac{-19}{96\sqrt{2}} + \frac{11}{64\sqrt{2}} \ln(3 + \sqrt{8})$$

Por tanto,

$$V = 2\pi r^3 \left[\frac{-3}{96\sqrt{2}} + \frac{8}{64\sqrt{2}} \ln(3 + \sqrt{8})\right] = \pi r^3 \left[-\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3 + \sqrt{8})\right]$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine el área de la región limitada por: *a)* el círculo $r = a$; *b)* $r = |2a \cos \theta|$; *c)* la rosa $r = a \operatorname{sen} 2\theta$; *d)* el caracol $r = b + a \cos \theta (a > b > 0)$; *e)* el caracol $r = b + a \cos \theta (b > a > 0)$ con dos hojas, una dentro de la otra; *f)* determine el área de cada hoja.

Resp.: *a)* πa^2; *b)* $2\pi a^2$; *c)* $\dfrac{\pi a^2}{2}$; *d)* $\dfrac{\pi}{2}(2b^2 + a^2)$; *e)* el área de la hoja menor es:

$$\frac{\pi - \alpha}{2}(2b^2 + a^2) - 2ab \operatorname{sen} \alpha - \frac{a^2}{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{\pi - \alpha}{2}(2b^2 + a^2) - \frac{3}{2} b(a^2 - b^2)^{1/2}$$

de la hoja mayor:

$$\frac{\alpha}{2}(2b^2 + a^2) + \frac{3}{2} b(a^2 - b^2)^{1/2} \text{ con } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ y } \cos \alpha = -\frac{b}{a}$$

2. Si S es la región limitada por el grafo de $r = F(\theta)$, $r = G(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Con $0 \le \beta - \alpha \le \pi$ y $0 \le F(\theta) \le G(\theta)$ para $\theta \in [\alpha, \beta]$. Muestre que

$$\text{área}(S) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (G^2 - F^2)$$

3. Determine el área de intersección de las regiones limitadas por las curvas: *a)* $r = 2a \cos \theta$ y $r = 2a \operatorname{sen} \theta$; *b)* $r = a \operatorname{sen} \theta$ y $r = a(1 + \cos \theta)$.

Resp.: *a)* $\dfrac{1}{2}(\pi - 2)a^2$; *b)* $\dfrac{1}{2}(\pi - 2)a^2$

4. Halle el área comprendida entre la primera y segunda espira de la espiral de Arquímedes $r = a\theta$.

Resp.: $8\pi^3 a^2$

5. Halle el área de una de las hojas de la curva $r = a \cos 2\theta$. *Resp.:* $\dfrac{\pi a^2}{8}$

6. Halle el área limitada por la curva $r = a \operatorname{sen} 3\theta$. *Resp.:* $\dfrac{\pi a^2}{4}$

7. Halle el área limitada por el caracol de Pascal $r = 2 + \cos\theta$. *Resp.:* $\dfrac{9}{2}\pi$

8. Halle el área de la figura limitada por la elipse $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ $(0 \leq e < 1)$.

Resp.: $\dfrac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$

9. Halle el área de la figura limitada por la curva $r = 2a\cos 3\theta$ y que está fuera del circulo $r = a$.

Resp.: $a^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10. Halle la longitud del arco de la parte de la parábola $r = a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$, cortada de la misma por la recta vertical que pasa por el polo. *Resp.:* $2a[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$

11. Halle la longitud del arco de la espiral hiperbólica $r\theta = 1$ desde el punto (2, 1/2) hasta el punto (1/2, 2).

Resp.: $\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \ln\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

12. Halle la longitud del arco de la espiral logarítmica $r = ae^{m\theta} (m > 0)$, que se encuentra dentro del circulo $r = a$.

Resp.: $\dfrac{a\sqrt{1 + m^2}}{m}$

13. Halle la longitud del arco de la curva $\theta = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$ desde $r = 1$ hasta $r = 3$.

Resp.: $\dfrac{1}{2}[4 + \ln 3]$

14. Halle el área de la superficie engendrada al girar la lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$ alrededor del eje polar.

Resp.: $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$

15. Halle el área de la superficie engendrada por la rotación de la cardioide $r = 2a(1 + \cos\theta)$ alrededor del eje polar. *Resp.:* $\dfrac{128}{5}\pi a^2$

16. Determine el área engendrada por la lemniscata de Bernouilli $\rho = r^2\cos 2\theta$ al girar: *a*) alrededor del eje polar; *b*) alrededor del eje perpendicular trazado por el polo.

Resp.: *a*) $A = 2\pi r^2(2 - \sqrt{2})$; *b*) $A = 2\sqrt{2}\pi r^2$

17. Dada una curva en coordenadas polares $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Con las hipótesis adecuadas, deduzca las fórmulas que dan el área de las siguientes superficies de revolución obtenidas a partir de la curva.

$$s_x = 2\pi\int_\alpha^\beta r\operatorname{sen}\theta\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\theta$$

$$s_y = 2\pi\int_\alpha^\beta r\cos\theta\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\theta$$

18. Halle el área generada por $r = a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta$, $b < a$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, al girar alrededor del eje X.

Resp.: $\pi a^2 + \pi b^4(a^4 - b^4)^{-1/2}\ln\{b^{-2}[a^2 + (a^4 - b^4)]^{1/2}\}$

19. Halle el área generada por $r^2 = a^2\cos^2\theta - b^2\operatorname{sen}^2\theta$, $b < a$, $0 \leq \theta \leq \alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}$, al girar alrededor del eje X.

Resp.: $\pi\{a^2 - ab^2\delta^{-1} + b^4\varepsilon^{-1}\ln[(a^2 + \varepsilon)(a\delta - \varepsilon)b^{-3}\delta^{-1}]\}$; $\delta = (a^2 + b^2)^{1/2}$, $\varepsilon = (a^4 - b^4)^{1/2}$

CAPITULO 17

Integrales impropias

Se va a extender la definición de integral definida para que el simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ tenga significado si el intervalo de integración o la función no son acotados.

Definición 1. La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se dice impropia si *a*) la función $f(x)$ tiene uno o más puntos de discontinuidad en $[a, b]$ o *b*) por lo menos uno de los dos limites de integración es infinito. Si f es integrable sobre $[a, b]$ para todo $b < \infty$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ se llama una integral impropia de primera especie. Si $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existe, se dice que la integral impropia es convergente e $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

Si el límite no existe se dice que la integral impropia es divergente. En forma análoga si f es integrable sobre $[a, b]$ para cada $a > -\infty$. $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se llama integral impropia definida por $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

Definición 2. Si f es integrable sobre $[a,b]$ para todo $\varepsilon > 0$ y no acotada en $[a,b[$, entonces se dice que $\int_a^b f(x)\,dx$ es una integral impropia de segunda especie. Si $\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ existe, se dice que la integral impropia es convergente e $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to a^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Si el limite no existe, la integral se llama divergente. Cuando f es integrable sobre $[a + \varepsilon, b]$ para cada $\varepsilon > 0$ y no es acotada en $]a,b]$ se define $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

Definición 3. Si $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ e $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ son ambas convergentes para algún c, se dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente y su valor se define por la suma $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^{\infty} f$. Diverge si ambas son divergentes.

Notaciones *O* y *o*

Definición 1. La notación $f = O(g)$ en a se lee «f es igual a O de g en a cuando x tiende a a»; significa que en un entorno $V^*(a)$ de a, al cual no pertenece a, $g(x)$ no es cero y el cociente $f(x)/g(x)$ es acotado:

$$\text{existe } K > 0 \text{ tal que } x \in V^*(a) \Rightarrow g(x) \neq 0 \text{ y } |f(x)/g(x)| \leq K$$

Es decir, dentro de $V^*(a)$, $k|g|$ domina a f. Si simultáneamente $f = O(g)$ y $g = O(f)$ en a, se dice que las dos funciones f y g son del mismo orden de magnitud. Definiciones análogas cuando a se remplaza por a^+, a^-, $+\infty$, $-\infty$.

Definición 2. La función f domina a la función g sobre un conjunto A significa que ambas están definidas en A, y $g(x) \geq 0$ sobre A, y que:

$$x \in A \Rightarrow |f(x)| \leq g(x)$$

Por ejemplo, la función x domina a la función sen x en el intervalo $]0, +\infty[$ porque sen $x < x$.

Definición 3. La notación $f = o(g)$ en a, que se lee «f es igual a o de g en a», significa que en un entorno $V^*(a)$ de a, al cual no pertenece a, $g(x)$ no es cero y el cociente $f(x)/g(x)$ tiene por limite 0;

$$\lim_{x \to a} |f(x)/g(x)| = 0$$

Definiciones similares se aplican cuando a se remplaza por a^+, a^-, $-\infty$, $+\infty$.

Nota. El siguiente teorema muestra que $f = o(g)$ en $a \Rightarrow f = O(g)$ en a. Por ejemplo, si $x \to +\infty$, sen $x = 0(1)$, porque sen $x/1$ es acotada y $\log x = o(x)$ puesto que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ y, por tanto, $\log x = O(x)$.

Teorema. Suponga que g es una función distinta de cero y que el límite $\lim_{x \to a} |f(x)/g(x)| = L$ existe. Entonces

a) $0 \leq L < +\infty \Rightarrow f = O(g)$ en a.
b) $0 < L \leq +\infty \Rightarrow g = O(f)$ en a.
c) $0 < L < +\infty \Rightarrow f$ y g son del mismo orden de magnitud en a.

Enunciados similares existen si a se remplaza por a^+, a^-, $+\infty$, $-\infty$.

Demostración. *a*) Si el límite $\lim_{x \to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = L$ es finito, entonces existe un entorno de a dentro del cual $|f(x)/g(x)|$ es acotada. *b*) Si $\lim_{x \to a} |f(x)/g(x)| = L > 0$, entonces existe un entorno de a, al cual no pertenece a, y dentro del cual es acotada a partir de 0: $|f(x)/g(x)| \geq p > 0$; entonces $f(x) \neq 0$ y $|g(x)/f(x)| \leq 1/p$. *c*) Es consecuencia de *a*) y *b*) por definición.

Ejemplo. Si $x \to +\infty$, $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = 0\left(\frac{1}{x^2}\right)$, porque $\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right] \bigg/ \frac{1}{x^2} = \frac{-x}{x+1}$ y $\lim_{x \to +\infty} \left|\frac{-x}{x+1}\right| = 1 < +\infty$. La principal aplicación a las integrales impropias de las notaciones «O mayúscula» y «o minúscula» se da en el Problema 17-11.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 17-1 Muestre que $\int_1^\infty \frac{1}{x^r}\,dx$ converge si $r > 1$ y diverge si $r \le 1$.

Solución. Si $r \ne 1$ y $y > 1$, entonces $\int_1^y \frac{dx}{x^r} = \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\Big|_1^y = \frac{y^{-r+1}}{-r+1} - \frac{1}{-r+1}$.

Si $r > 1$, tenemos que $-r+1 < 0$ y $y^{-r+1} \to 0$ si $y \to \infty$.
Si $r < 1$, entonces $-r+1 > 0$ y $y^{-r+1} \to \infty$ si $y \to \infty$.

Así

$$\lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^r} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y^{-r+1}}{-r+1} - \frac{1}{-r+1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{r-1} & \text{si } r > 1 \\ \infty & \text{si } r < 1 \end{cases}$$

Por definición, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^r}$ converge a $\frac{1}{r-1}$ si $r > 1$ y diverge si $r < 1$.

Cuando $r = 1$, $\lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{1}{x^r}\,dx = \lim_{y\to\infty} \log y = \infty$. Es decir, $\int_1^y \frac{dx}{x^r}$ diverge.

Problema 17-2 Halle $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.

Solución. Integrando por partes, se obtiene

$$\int_0^t xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-x}\,dx = \frac{-t}{e^t} - \left(\frac{1}{e^t} - 1\right) = 1 - (t+1)/e^t$$

Como $\frac{t+1}{e^t} \to 0$ si $t \to \infty$, entonces $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}\,dx = 1$.

Problema 17-3 Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$ converge.

Solución. Es necesario mostrar que $\int_{-\infty}^{a} e^{-|x|}\,dx$ e $\int_a^\infty e^{-|x|}\,dx$ convergen para algún a. Por conveniencia, en este caso sea $a = 0$. Ahora,

$$\int_{-\infty}^0 e^{-|x|}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^{-|x|}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}(1 - e^t) = 1$$

De la misma manera, $\int_0^\infty e^{-|x|}\,dx = 1$. Por tanto, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$ converge a 2.

Problema 17-4 Vea si $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\,dx$ converge.

Solución. La integral es impropia, puesto que $\frac{1}{x^2} \to \infty$ si $x \to 0^+$. Ahora,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\,dx = \lim_{u\to0^+}\int_u^1 \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\,dx = \lim_{u\to0^+} \cos\frac{1}{x}\Big|_u^1 = \lim_{u\to0^+}\left(\cos 1 - \cos\frac{1}{u}\right)$$

El límite no existe; por tanto, $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\,dx$ diverge.

Problema 17-5 Determine la convergencia de las siguientes integrales:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} \quad ; \quad b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

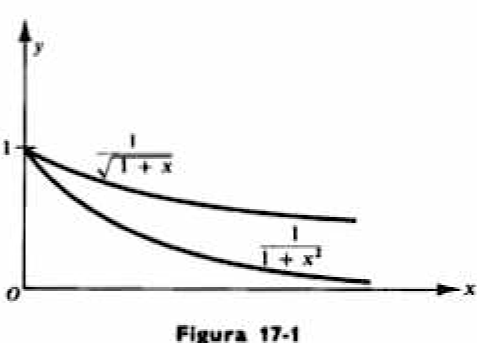


Figura 17-1

Solución. *a)* $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{(1+x)^2} = = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left[1 - \frac{1}{1+b}\right] = 1$. Entonces la integral es convergente e $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = 1$.

b) $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\Big|_0^b = 2(\sqrt{1+b} - 1)$. Por tanto, $\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \lim_{b\to\infty} 2(\sqrt{1+b} - 1)$.

$\therefore \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ es divergente.

El grafo de *a)* muestra que la altura del grafo tiende a 0 si $b \to \infty$; en cambio, el área de *b)* no es acotada.

Problema 17-6 Estudie la integral $\int_0^{\infty} \frac{-1-2x}{3x^{2/3}(x-1)^2}\,dx$.

Solución. Tiene discontinuidades en $x = 0$ y $x = 1$; luego podemos escribir:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \int_a^{1/2} f(x)\,dx + \lim_{b\to 1} \int_{1/2}^{b} f(x)\,dx + \lim_{c\to 1^+} \int_c^2 f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_2^k f(x)\,dx =$$

$$= F(x)\Big|_0^{1/2} + F(x)\Big|_{1/2}^{1^-} + F(x)\Big|_1^2 + F(x)\Big|_2^{\infty} \quad \text{con } F(x) = x^{1/3}/(x-1)$$

Ahora: $F(x)\Big|_{0^+}^{1/2} = F(1/2) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = -2^{2/3}$; $F(x)\Big|_{1/2}^{1^-} = \lim_{x\to 1} F(x) - F(1/2) = -\infty + 2^{2/3} = -\infty$;

$F(x)\Big|_{1^+}^{2} = F(2) - \lim_{x\to 1^+} F(x) = 2^{1/3} - \infty = -\infty$; $F(x)\Big|_2^{\infty} = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(2) = 0 - 2^{1/3} = -2^{1/3}$

Por ser la segunda y tercera integral infinitas, la integral diverge.

Problema 17-7 *Teorema de dominación.* Sean f y g funciones definidas en $]a, +\infty[$ con $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo $x > a$. Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge. Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverge. Si $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo x en $]a, b[$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, e $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Proposiciones análogas se verifican para los demás tipos de integrales impropias.

Demostración. Supongamos que $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo $x > a$. Entonces, para cada $t > a$,

$$\int_a^t f(x)\,dx \le \int_a^t g(x)\,dx \qquad (1)$$

Caso 1. $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t g(x)\,dx = A$, es decir, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge. Como $g(x) \ge 0$, sabemos que $G(t) = \int_a^t g(x)\,dx$ es una función creciente y esto significa que $G(t) \le A$. Ahora, sea $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ es creciente y, según (1), $F(t) \le A$ para todo $t > a$. Sea $B = \sup\{F(t): t > a\}$. Vamos a ver que $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = B$. En efecto, si $V_\varepsilon(B)$ es un entorno de B, entonces $V_\varepsilon(B) \cap B \ne \phi$. Suponga que $F(t_0) \in V_\varepsilon(B)$; como F es creciente, si $t \in]t_0, \infty[$, entonces $F(t_0) \le F(t) \le B$ y, por tanto, $F(t) \in V_\varepsilon(B)$.

Ahora, $]t_0, \infty[$ es un entorno del infinito y se aplica en $V_\varepsilon(B)$ por F. Por tanto, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

Caso 2. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge. Según el caso anterior es evidente que si $f(x) \ge 0$ y $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ es acotada, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge. Como $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge; esto quiere decir que $F(t) \to \infty$ si $t \to \infty$. Según (1), $G(t) = \int_a^t g(x)\,dx \to \infty$ si $t \to \infty$. Entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

Problema 17-8

Halle el área limitada por la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \ge 1$, el eje X y la recta $x = 1$.

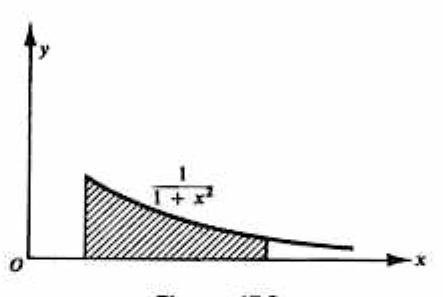


Figura 17-2

Solución. Como para cada $t \ge 1$, $\int_1^t \dfrac{dx}{1+x^2}$ representa el área rayada, parece razonable definir el área pedida como la integral $\int_1^\infty \dfrac{dt}{t^2+1}$ si este número existe. Este número existe porque $0 \le \dfrac{1}{1+x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ e $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ existe.

Ahora, $\int_1^t \dfrac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } t - \text{arc tg } 1 = \text{arc tg } t - \dfrac{\pi}{4}$. Si $t \to \infty$, arc tg $\to \dfrac{\pi}{2}$, por tanto,

$$\text{área} = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\left(\text{arc tg } t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Problema 17-9

Pruebe que $\int_1^\infty \dfrac{\text{sen } x}{x}\,dx$ converge.

Solución. Integrando por partes, se obtiene

$$\int_1^y \frac{\text{sen } x}{x}\,dx = \int_1^y \frac{1}{x}\,d(-\cos x) = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^y - \int_1^y \frac{\cos x\,dx}{x^2}$$

y $\lim\limits_{y\to\infty}\left(-\dfrac{\cos y}{y} + \cos 1\right) = \cos 1$, y queda por mostrar que la integral de la derecha converge. No podemos decir que $\dfrac{\cos x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ e $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ converge, porque el teorema exige que las dos funciones no deben ser negativas. Para $x \ge 1$ defina (vea Figs. 17-3 y 17-4):

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } \cos x \ge 0 \\ 0 & \text{si } \cos x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \cos x \ge 0 \\ -\cos x & \text{si } \cos x < 0 \end{cases}$$

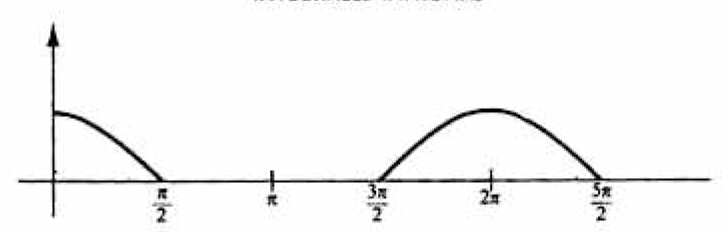


Figura 17-3

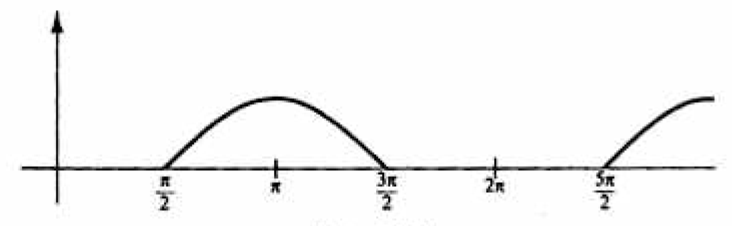


Figura 17-4

Entonces $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ y $f(x) - g(x) = \cos x$ para $x \geq 0$. Por consiguiente, $0 \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ y $0 \leq \frac{g(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, y, por tanto,

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \int_1^\infty \frac{f(x) - g(x)}{x^2}\, dx = \int_1^\infty \frac{f(x)\, dx}{x^2} - \int_1^\infty \frac{g(x)}{x^2}\, dx$$

Resultado correcto, puesto que las dos integrales de la derecha convergen. Entonces

$$\int_1^y \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx \to \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx \text{ si } y \to \infty \text{ e } \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx \text{ converge}$$

Problema 17-10 Muestre que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + 5\sqrt{x} + 17}$ converge.

Solución. Para $x \geq 1$, $\frac{1}{x^2 + 5\sqrt{x} + 17} < \frac{1}{x^2}$, la convergencia de $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ implica que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + 5\sqrt{x} + 17}$ es convergente.

Problema 17-11 Si f y g son funciones no negativas en $[a, +\infty[$ e integrables sobre $[a, t]$ para $t > a$, y si $f = O(g)$ en $+\infty$, entonces la convergencia de $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ implica la de $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. Proposiciones similares se enuncian para las integrales impropias sobre los restantes intervalos.

Solución. Sea b un número mayor que a y K un número positivo tal que Kg domina a f sobre el intervalo $[b, +\infty[$. Como $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge y

$$\lim_{t \to +\infty} \int_b^t Kg(x)\, dx = K \lim_{t \to +\infty} \int_a^t g(x)\, dx - K \int_a^b g(x)\, dx$$

la función Kg es integrable sobre $[b, +\infty[$. Entonces, según el Problema 17-7, f también es integrable sobre $[b, +\infty[$. Finalmente, como

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \lim_{t \to +\infty} \int_b^t f(x)\, dx$$

f es integrable sobre $[a, +\infty[$.

Problema 17-12 Estudie la convergencia de $\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^3}$.

Solución. El integrando $f(x) = \frac{1}{1 - x^3}$ no es localmente acotado en $x = 1$.

$f(x) = 1/(1 - x^3) = 1/(1 - x)(1 + x + x^2)$ y comparándola con $g(x) = 1/(1 - x)$ se obtiene

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + x^2 + x^3} = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow g = O(f). \text{ Como } \int_0^1 g \text{ diverge}$$

$$\left(\int_0^1 \frac{dx}{1 - x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [-\ln(1 - x)] \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\ln \varepsilon) = +\infty \right), \text{ entonces } \int_0^1 f \text{ diverge}$$

Problema 17-13 Estudie la convergencia de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 2x + 2}}$.

Solución. El integrando, cuando $x \to +\infty$, es del mismo orden de magnitud que $1/x^{3/2}$, porque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x + 2}}}{1/\sqrt{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + 2x + 2}} = 1.$$

y $0 < 1 < +\infty$. Como $3/2 > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge y, por tanto, la integral dada converge.

Problema 17-14 La función beta. Determine los valores de p y q para los cuales la siguiente integral converge.

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1}\, dx$$

Solución. El integrando tiene discontinuidades en $x = 0$ y $x = 1$. Si $x \to 0^+$, $f(x) = x^{p-1}(1 - x)^{q-1}$ es del mismo orden de magnitud que x^{p-1}, porque $\lim_{x \to 0^+} f(x)/x^{p-1} = \lim_{x \to 0^+} (1 - x)^{q-1} = 1$ y $0 < 1 < +\infty$. Análogamente, si $x \to 1^-$, $f(x)$ es del mismo orden de magnitud que $(1 - x)^{q-1}$. La convergencia de $\int_0^c f$ e $\int_c^1 f$, para $0 < c < 1$, es equivalente a la convergencia de

$$\int_0^c \frac{dx}{x^{1-p}} \text{ y de } \int_c^1 \frac{dx}{(1 - x)^{1-q}} = \int_c^1 \frac{d(1 - x)}{(1 - x)^{1-q}} = \int_0^{1-c} \frac{du}{u^{1-q}}$$

y, por consiguiente, según el Problema 17-1, a las desigualdades $1 - p < 1$ y $1 - q < 1$. Por tanto, la integral converge si, y solamente si, p y q son positivos.

Problema 17-15 La función gamma. Determine los valores de α para los cuales $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\, dx$ converge.

Solución. Si $x \to 0^+$, $f(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}$ es del mismo orden de magnitud que $x^{\alpha-1}$. Cuando $x \to +\infty$, $f(x) = O(1/x^2)$, puesto que $\lim_{x \to \infty} x^{\alpha+1}e^{-x} = 0$. Como $\int_0^1 x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ converge si, y solamente si, $1 - \alpha < 1$ o $\alpha > 0$, y como $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, la integral converge si, y solamente si, α es positivo.

Problema 17-16 Si $\int_a^{+\infty} f$ e $\int_a^{+\infty} g$ son convergentes, entonces *a*) $\int_a^{+\infty} (c_1 f + c_2 g)$ convergen ($c_1, c_2 \in \mathbf{R}$). *b*) $\int_a^{+\infty} (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_a^{+\infty} f + c_2 \int_a^{+\infty} g$.

Solución.

$$\int_a^{+\infty} (c_1 f + c_2 g) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b (c_1 f + c_2 g) = \lim_{b \to +\infty} \left(c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g \right) =$$
$$= c_1 \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f + c_2 \lim_{b \to +\infty} \int_a^b g = c_1 \int_a^{+\infty} f + c_2 \int_a^{+\infty} g$$

Problema 17-17 Si $|f|$ es integrable en todo subintervalo cerrado y acotado de $[a, +\infty[$, entonces: *a*) $\int_a^{+\infty} |f|$ converge, implica que $\int_a^{+\infty} f$ converge. *b*) $\left| \int_a^{+\infty} f \right| \leq \int_a^{+\infty} |f|$.

Solución. Para demostrar la parte *a*) observe que $0 \leq f + |f| \leq 2|f|$. Por tanto, si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge, lo mismo sucede con $\int_a^{+\infty} (f + |f|)$, según el problema anterior. Pero $f = (f + |f|) - |f|$. Por tanto, $\int_a^{+\infty} f$ converge, puesto que es la diferencia de dos integrales convergentes.

b) Se deja como ejercicio.

Problema 17-18 La $\int_a^{+\infty} f$ converge absolutamente $\Leftrightarrow$ $\int_a^{+\infty} |f|$ converge. Si $\int_a^{+\infty} f$ converge, pero no absolutamente, decimos que $\int_a^{+\infty} f$ converge condicionalmente. Muestre que $\int_\pi^{+\infty}$ sen x/x converge condicionalmente.

Solución. Para cualquier $s > \pi$ (empleando integración por partes) tenemos que $\int_\pi^s \frac{\text{sen } x}{x}\, dx = \frac{1}{\pi} - \frac{\cos x}{x} + \int_\pi^s \frac{\cos x}{x^2}\, dx$. Ahora, $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ $(\pi \leq x < \infty)$.

Como $\int_\pi^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge absolutamente, entonces $\int_\pi^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ converge absolutamente, y, por tanto, converge. Así $\lim_{s \to \infty} \int_\pi^s \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$ existe y $\therefore$ $\int_\pi^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$ converge.

Problema 17-19 Muestre que la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ es convergente.

Solución. La integral es impropia porque $1/\sqrt{1 - x^2}$ no es acotada en $[0, 1]$. Primero vamos a mostrar que la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}}$ es convergente (y, por tanto, absolutamente convergente, porque $\sqrt{1 - x} \geq 0$). Si $0 < \varepsilon < 1$, entonces

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \text{ y, por tanto, } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = 2$$

Entonces $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}}$ converge absolutamente. Pero para $0 \leq x < 1$, $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$, entonces $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ es absolutamente convergente, lo cual implica que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ es convergente.

Problema 17-20 Estudie la integral $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$.

Solución. Para $x \to b$, $\frac{1}{(b-x)^n} \to \infty$ si $n > 0$. La primitiva es

$$F(x) = \int \frac{dx}{(b-x)^n} = -\frac{(b-x)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(n-1)(b-x)^{n-1}}, \text{ si } n \neq 1$$

y, por tanto,
$$A = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{1}{n-1}\left[\lim_{x \to b} \frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{(b-a)^{n-1}}\right]$$

Si $0 < n < 1$, entonces $A = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{(b-a)^{n-1}}$, que existe y es finito; luego la integral es convergente. Si $n > 1$, entonces $A \to \infty$ y la integral es divergente. Si $n = 1$, $A(x) = \int \frac{dx}{b-x} = -\ln(b-x) = \ln \frac{1}{b-x}$. En tal caso, $A = \int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{x \to b}\left[\ln \frac{1}{b-x}\right] - \ln \frac{1}{b-a} = \infty$; la integral es divergente.

Resumiendo:
$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \left\{ \begin{matrix} \text{converge} \\ \text{diverge} \end{matrix} \right\} \text{ si } \left\{ \begin{matrix} 0 < n < 1 \\ n \geq 1 \end{matrix} \right.$$

Problema 17-21 Estudie la convergencia de $\int_0^1 \frac{x^3\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Solución. La $\int_0^1 \frac{x^3\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ tiene un integrando que se hace infinito para $x = 1$.

$$\int_0^1 \frac{x^3\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3\sqrt{x^2-x+1}}{[(1-x)(1+x)]^{1/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3\sqrt{x-2+\frac{3}{x+1}}}{(1-x)^{1/2}}\,dx < \int_0^1 \frac{M}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

que coincide para $n = 1/2$ con el problema anterior; luego es convergente. Consecuencia de que $x^3\sqrt{x-2+\frac{3}{x+1}}$ es una función continua y permanece finita en $[0, 1]$; luego está acotada por un número M.

Problema 17-22 Determine cuáles de las siguientes integrales son convergentes y cuáles divergentes. Calcule las que son convergentes.

1. $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$
2. $\int_0^1 x \log x\,dx$
3. $\int_0^a \frac{dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}$
4. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
5. $\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$
6. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}$
7. $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$
8. $\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x}$
9. $\int_0^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}}$
10. $\int_0^{2a} \frac{dx}{(a-x^2)}$
11. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)x^{1/2}}$
12. $\int_a^\infty \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^{1/2}}$
13. $\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} x\,dx$
14. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Solución. 1. Como sec x es discontinua en $\frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \sec x\, dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| = \ln\left|\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (\sec t + \operatorname{tg} t)\right|$$

y el límite no existe. La integral es divergente.

2. Como ln 0 no existe,

$$\int_0^1 x\ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x\ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_t^1 - \frac{1}{2}\int_t^1 x\, dx\right] = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]\Big|_t^1 =$$

$$= -\frac{1}{4} - \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{2}\ln t = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

3. La integral es discontinua en a; entonces

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{t\to a^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{t\to a^-} \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\Big|_0^t = \lim_{t\to a^-}\operatorname{arc\,sen}\frac{t}{a} = \frac{\pi}{2}$$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$. Si hacemos $x = \ln u \Rightarrow \int_t^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int_t^1 \frac{e^x\, dx}{e^{2x} - 1} =$
$= \int_{e^t}^{e} \frac{u\, du}{u(u^2-1)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Big|_{e^t}^{e} = \frac{1}{2}\ln\frac{e-1}{e+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{e^t-1}{e^t+1}$.

$\therefore\ \int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{e-1}{e+1} - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\ln\frac{e^t-1}{e^t+1}$, y como el límite no existe, la integral es divergente.

5. Tenemos que $\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)(e^{-x}\cos x + e^{-x}\operatorname{sen} x)\Big|_0^t =$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(e^{-t}\cos t + e^{-t}\operatorname{sen} t) = \frac{1}{2}$.

6. $\int_0^\infty \frac{x\, dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x\, dx}{x^2+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$. Este límite no existe; por tanto, la integral no existe.

7. $\pi/2ab$.
8. La integral es divergente.
9. $9a^{2/3}$.
10. La integral es divergente.
11. π.
12. La integral diverge.
13. La integral diverge.
14. $\pi/2$.

Problema 17-23 Compruebe si: *a)* $\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x} = \log|x|\Big|_{-a}^{a} = \ln|a| - \ln|-a| = 0$;

$$b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^3}{1+x^4}\, dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} \frac{4x^3}{1+x^4}\, dx = \lim_{t\to\infty}\ln(1+x^4)\Big|_{-t}^{t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}[\ln(1+t^4) - \ln(1+(-t)^4)] = 0$$

Solución. *a)* El razonamiento es falso porque no tiene en cuenta que el integrando es discontinuo en 0. La proposición verdadera es:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t} \frac{dx}{x} + \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^-}\ln|x|\Big|_{-1}^{t} + \lim_{u\to 0^+}\ln|x|\Big|_u^1 = \lim_{t\to 0^-}\ln|t| - \lim_{u\to 0^+}\ln|u|$$

y como ninguno de los límites existe, la integral es divergente.

b) En este caso, la falacia está en que t y $-t$ no se aproximan a $+\infty$ y $-\infty$, independientemente. La proposición es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx + \lim_{u\to-\infty}\int_u^0 \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \ln(1+x^4)\Big|_0^t +$$

$$+ \lim_{u\to-\infty} \ln(1+x^4)\Big|_u^0 = \lim_{t\to+\infty} \ln(1+t^4) - \lim_{u\to-\infty} \ln(1+u^4)$$

Como ninguno de los límites existe, la integral diverge.

Problema 17-24

Si $a > 0$, ¿para qué valor de α es convergente la integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(1+ax^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{(x+1)}\right) dx?$$

Solución.

$$\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{1+ax^2}} - \frac{\alpha}{x+1}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|x + \sqrt{\frac{1}{a}+x^2}\right| - \alpha \ln|x+1|\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left[t + \sqrt{\frac{1}{a}+t^2}\right] - \alpha \ln(t+1) - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\frac{1}{\sqrt{a}} =$$

$$= \ln\left\{\left[t + \sqrt{\frac{1}{a}+t^2}\right]^{1/\sqrt{a}}\Big/(t+1)^{\alpha}\right\} + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\sqrt{a}$$

La integral converge si, y solamente si, $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\left[t+\left(\frac{1}{a}+t^2\right)^{1/2}\right]^{1/\sqrt{a}}}{(t+1)^{\alpha}}\right)$ existe; si $\alpha > \frac{1}{\sqrt{a}}$, el límite es cero; si $\alpha < \frac{1}{\sqrt{a}}$, no existe.

Sin embargo, cuando $\alpha = 1/\sqrt{a}$, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t+\left(\frac{1}{a}+t^2\right)^{1/2}}{t+1}\right]^{1/\sqrt{a}} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1+\left(\frac{1}{at^2}+1\right)^{1/2}}{1+\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = 2^{1/\sqrt{a}}$$

Por tanto, la integral converge únicamente cuando $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$ y su valor es

$$\ln 2^{1/\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln 2\sqrt{a}$$

Problema 17-25

¿Para qué valores de n, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ es convergente?

Solución. Aplicando la regla de L'Hospital repetidamente, se tiene que para cualquier entero n:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

Entonces para cualquier entero n se puede hallar $x_n > 1$ tal que si $x > x_n \Rightarrow \frac{x^{n+2}e^{-x}}{x^2} < \frac{1}{x^2}$.

Como $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, según el Problema 17-1, $\int_{x_n}^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$ converge. Debido a que el integrando es continuo sobre $[0, x_n]$, podemos concluir que $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$ converge para todo entero positivo n.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Diga por qué las siguientes integrales son impropias y determine la convergencia o divergencia de la integral:

a) $\int_1^\infty x^{-3}\,dx$; *b)* $\int_{r_0}^\infty \frac{dr}{r^2}\ (r_0 > 0)$; *c)* $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$; *d)* $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$; *e)* $\int_0^1 x^{-3/2}\,dx$; *f)* $\int_0^4 \frac{du}{\sqrt{4-u}}$

Resp.: *a)* 1/2, integral impropia de primera clase; *b)* $1/r_0$, integral impropia de primera clase; *c)* ∞, integral impropia de primera clase; *d)* 2, integral impropia de primera clase; *e)* ∞, integral impropia de segunda clase; *f)* 4, integral impropia de segunda clase.

2. Muestre que $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2}$.

3. Pruebe que $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

4. Pruebe que $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{1+x}$ es convergente si, y solamente si, $0 < s < 1$.

5. Determine la convergencia o divergencia y dé el valor cuando la integral converja.

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$; *b)* $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$; *c)* $\int_0^\infty e^{-x}\,\text{sen}\,x\,dx$; *d)* $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$; *e)* $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Resp.: *a)* $\ln 2$; *b)* 1; *c)* $\frac{1}{2}$; *d)* $\frac{3}{2}$; *e)* 0

6. Determine la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^3)}$; *b)* $\int_1^\infty \frac{2+\text{sen}\,x}{x}\,dx$; *c)* $\int_1^\infty \frac{x^3+2}{2x^4(x^3+1)}\,dx$.

Resp.: *a)* convergente; *b)* divergente

7. ¿Para qué valor de c converge la integral $\int_2^\infty \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx$? Determine c y calcule la integral. *Resp.:* $c = 1/2$, el valor de la integral es 1/4 log 5/4

8. Sea $\Gamma(s) = \int_{0^+}^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$, $s > 0$ (función gamma). Integrando por partes muestre que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ y muestre por inducción que $\Gamma(n+1) = n!$, n entero positivo.

9. Diga cuáles de las siguientes integrales son convergentes o divergentes. Dé sus razones. No calcule la integral:

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\text{sen}\,x}$ *c)* $\int_1^{+\infty} e^{-2x}\ln x\,dx$ *e)* $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ *d)* $\int_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}\ln x}$ *f)* $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{e^x}$

Resp.: *a)* Convergente; *b)* convergente; *c)* convergente; *d)* convergente; *e)* convergente; *f)* convergente.

10. Use un límite de la forma $\lim_{x\to+\infty} x^{-a}\ln x = 0$ o $\lim_{x\to 0^+} x^a\ln x = 0$; $a > 0$, para establecer la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2+1}$; *b)* $\int_0^{\pi/2} \ln\,\text{sen}\,x\,dx$; *c)* $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$; *d)* $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

Resp.: *a)* 0; *b)* 0; *c)* 0; *d)* 0

11. Emplee el criterio de comparación para establecer la convergencia de las siguientes integrales:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\text{sen}^2 x\,dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,dx$$

12. Pruebe que la integral $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(1+x)^q}$ converge si, y solamente si, $1 - q < p < 1$.

CAPITULO 18

Funciones exponencial, logarítmica e hiperbólica

Recuerde que los logaritmos se estudiaron en matemáticas elementales con el fin de transformar problemas de multiplicación en problemas más sencillos de adición. Esto se hizo por medio de la ecuación

$$\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y \tag{18-1}$$

Esto nos permite plantear un problema más general y es hallar todas las funciones f definidas en los reales positivos y que verifican la ecuación funcional

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{18-2}$$

Como estamos interesados en funciones que sean derivables, supondremos además que f sea derivable. Si en la ecuación (18-2) se hace $x = y = 1$, entonces $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$. De donde se sigue que $f(1) = 0$.

Ahora, fijando un y y derivando (18-2) con respecto a x, se obtiene

$$yf'(xy) = f'(x) \tag{18-3}$$

Si hacemos $x = 1$ en (18-3), se obtiene

$$f'(y) = f'(1)\frac{1}{y} \tag{18-4}$$

Como $y \neq 1$ y, por hipótesis, f' es continua en todo intervalo $[a,x]$ con $0 < a < x$, aplicando el teorema fundamental del cálculo y la ecuación (18-4) se obtiene

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y)dy = f'(1)\int_a^x \frac{1}{y}\,dy \tag{18-5}$$

Finalmente, haciendo $a = 1$ y empleando la ecuación $f(1) = 0$, se obtiene

$$f(x) = f'(1)\int_1^x \frac{1}{y}\,dy \tag{18-6}$$

En resumen, hemos mostrado que toda función derivable que verifica la propiedad «logarítmica» $f(xy) = f(x) + f(y)$ debe también verificar la ecuación (18-6).

Definición. La función $t \to 1/t$ es continua en todo intervalo de la forma $[1, x]$ o $[x, 1]$, $x > 0$. Entonces es integrable en uno de tales intervalos. Se llama logaritmo natural (o neperiano) de $x > 0$ el número, escrito $\log_e x$ o $\ln x$, y se define por

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Es decir, se representa por $x \to \ln x$ la aplicación derivable de $\mathbf{R}_+^* = \mathbf{R}^+ - \{0\}$ en $\mathbf{R}$, que se anula para $x = 1$ y cuya derivada es $1/x$.

Grafo de $y = \ln x$. La función $\ln x$ es estrictamente creciente y es un homeomorfismo de $\mathbf{R}_+^* = \mathbf{R}^+ - \{0\}$ en $\mathbf{R}$. (Es un isomorfismo del grupo multiplicativo $\mathbf{R}_+^*$ en el grupo aditivo $\mathbf{R}$.)

El grafo de la función se muestra en la Figura 18-1.

Los siguientes resultados son útiles para su trazado: la recta $x = 0$ es una asintota porque $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

La derivada $1/x$ de la función $\ln x$ permite hacer el trazado de la curva utilizando tangentes; por ejemplo, la tangente en $x = 1$ tiene por pendiente a 1. En el punto $x = e$ la tangente a la curva en el punto $m(x, \ln x)$ pasa por el origen y su pendiente es $\ln x/x$.

También $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x/x = 0$ muestra que la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(x, \ln x)$ tiende a cero si x tiende a infinito. Por esta razón decimos que el grafo tiene una rama parabólica infinita en la dirección de Ox.

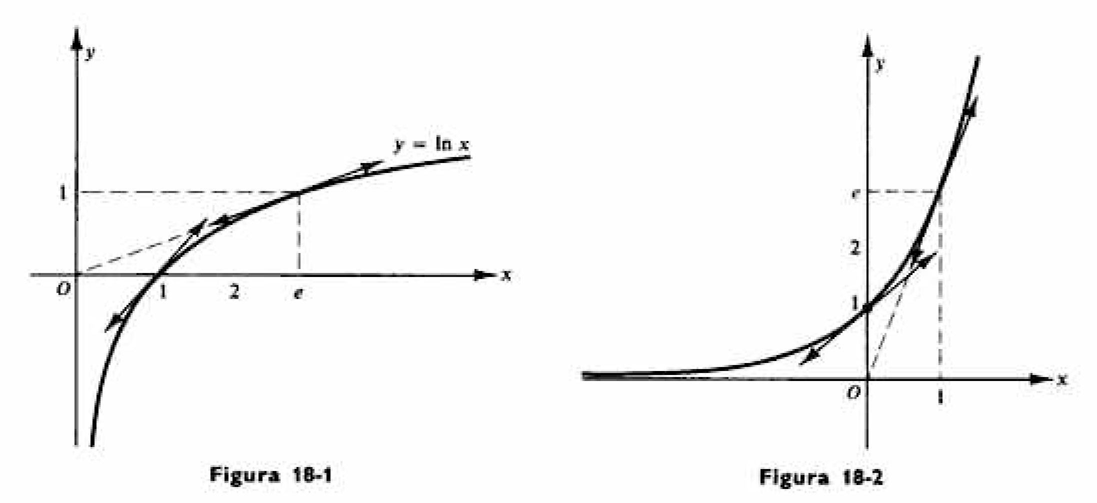


Figura 18-1

Figura 18-2

Función exponencial natural (o neperiana)

La función $y = \ln x$ es un homeomorfismo estrictamente creciente de $\mathbf{R}_+^*$ sobre $\mathbf{R}$. La función reciproca es un homeomorfismo creciente estrictamente de $\mathbf{R}$ sobre $\mathbf{R}_+^*$.

Definición. La función reciproca de $y = \ln x$ se llama función exponencial neperiana y se representa por $x \to \exp(x)$ o e^x.

$$(y \in \mathbf{R}_+^*) \quad x = \ln y \Leftrightarrow y = \exp(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

Grafo de $y = e^x$. El grafo de $y = e^x$ se deduce a partir del grafo de la aplicación reciproca, por simetria con relación a la bisectriz de los ejes. Haciendo tal simetria al grafo de la Figura 18-1, se obtiene la Figura 18-2.

Logaritmo de base cualquiera

Definición. Se llama logaritmo en base $b(b > 0$ y $b \neq 1)$, y se escribe $\log_b$, la función

$$x \to \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Nota. El logaritmo neperiano coincide con el logaritmo de base e, puesto que $b = e \Rightarrow \ln b = 1$.
Cuando $b = 10$, se obtiene el logaritmo decimal.
Cuando $b = 2$, se obtiene el logaritmo en base dos.

Estudio de $y = \log_b x$. La función $y = \log_b x$ es un isomorfismo del grupo multiplicativo $\mathbf{R}_+^*$ sobre el grupo aditivo $\mathbf{R}$:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^* \quad \log_b (\alpha \cdot \beta) = \log_b \alpha + \log_b \beta$$

La función es derivable en $\mathbf{R}_+^*$ y su derivada está dada por $y' = \dfrac{1}{x \ln b}$. Por consiguiente,

$$b > 1 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow \log_b \text{ es estrictamente creciente}$$
$$0 < b < 1 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow \log_b \text{ es estrictamente decreciente}$$

Observe que la aplicación $b \to \dfrac{1}{b}$ es una biyección de $]1, +\infty[$ sobre $]0, 1[$. Además como $\log(1/b) = -\ln b$, se deduce que $\log_{1/b} x = -\log_b x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

La Figura 18-3 contiene el grafo de $y = \log_b x$ para $b > 1$. Se deduce a partir del grafo de $y = \ln x$ (Fig. 18-1) multiplicándola por la constante $1/\ln b$, puesto que

$$(\forall x \in \mathbf{R}_+^*) \ \frac{\log_b x}{\ln x} = \frac{1}{\ln b}$$

El grafo de $y = \log_{1/b} x$ se deduce por simetría respecto del eje X (Fig. 18-3).

Cambio de base. Si a y b son dos bases distintas, se tiene $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{\ln b}{\ln a} \cdot \dfrac{\ln x}{\ln b}$, de donde se deduce que la fórmula de cambio de base para los logaritmos es

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$$

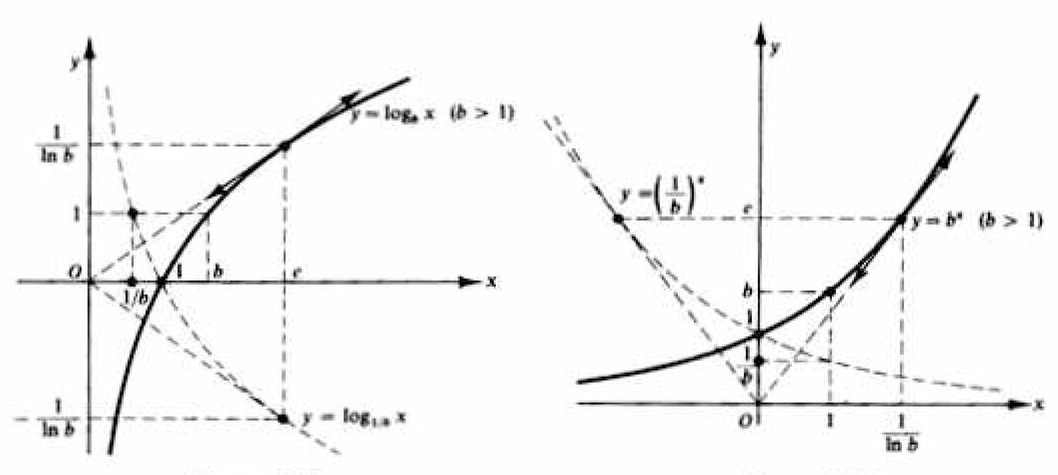


Figura 18-3 Figura 18-4

Función exponencial

Definición. La aplicación recíproca de $y = \log_b x$ se llama la función exponencial de base b.

$$(\forall y \in \mathbf{R}_+^*) \quad x = \log_b y \Leftrightarrow y = b^x \quad (x \in \mathbf{R})$$

Propiedades. Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de las de $y = \log_b x$.

1. $y = b^x$ es un homeomorfismo de $\mathbf{R}$ sobre $\mathbf{R}_+^*$. Es estrictamente creciente si $b > 1$, y estrictamente decreciente si $0 < b < 1$.

2. $y = b^x$ es un isomorfismo del grupo aditivo $\mathbf{R}$ sobre el grupo multiplicativo de $\mathbf{R}_+^*$. Es decir, es una biyección de $\mathbf{R}$ sobre $\mathbf{R}_+^*$ que verifica la propiedad

$$(\forall x, x' \in \mathbf{R}) \quad b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$$

3. $y = b^x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln y}{\ln b} \Leftrightarrow \ln y = x \ln b \Leftrightarrow y = e^{x \ln b}$. Entonces, $(\forall x \in \mathbf{R}), b^x = e^{x \ln b}$

4. La derivada de la función $y = b^x$ es $y' = \ln b e^{x \ln b} = b^x \cdot \ln b$.

5. La Figura 18-4 muestra el grafo de $y = b^x$ para $b > 1$. Se deduce a partir del grafo de $y = e^x$. El grafo de $y = \left(\dfrac{1}{b}\right)^x$ es simétrico del grafo de $y = b^x$ con relación al eje Y.

Función exponencial natural

Definición. Para todo $x \in \mathbf{R}_+^*$ y todo $\alpha \in \mathbf{R}$ se define $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Monotonía. La función $f(x) = x^\alpha$ es la compuesta de las funciones $g(x) = \alpha \ln x$, que aplica $\mathbf{R}_+^*$ sobre $\mathbf{R}$, y de la función $h(u) = e^u$, que aplica $\mathbf{R}$ sobre $\mathbf{R}_+^*$.

En consecuencia, como h es estrictamente creciente, si $\alpha > 0$, g es estrictamente creciente y, por consiguiente, $f = h \circ g$ es estrictamente creciente. Si $\alpha < 0$, g es estrictamente decreciente y, por tanto, f es estrictamente decreciente.

Derivada. Aplicando la fórmula de la derivación de una función compuesta se obtiene que

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

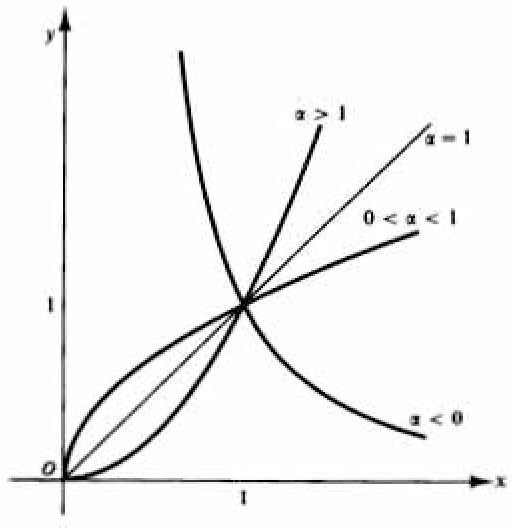


Figura 18-5

Grafo. La Figura 18-5 muestra el grafo de las cuatro funciones del tipo $f(x) = x^\alpha$ para los valores indicados de α. Para $\alpha > 0$, la tangente en 0 tiene por pendiente $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - 1}$. Entonces la tangente en 0 es el eje X para $\alpha > 1$ y el eje Y para $0 < \alpha < 1$.

Generalización. Si u y v son dos funciones, se puede definir para todo x tal que $u(x) > 0$ la función $f(x) = u(x)^{v(x)}$ por $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$

Si u y v son derivables, lo mismo es u^v, y su derivada se obtiene de la derivación de las funciones compuestas

$$(u^v)' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$$

$$\therefore\ (u^v)' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 18-1 Halle la derivada de:

$$a)\quad y = \ln(x^2 + 1);\quad b)\ y = \ln|\cos x|;\quad c)\ y = \ln\frac{x - a}{x + a}.$$

Solución. *a)* $y' = [\ln(x^2 + 1)]' = \dfrac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1)' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ sobre $\mathbf{R}$.

b) $y' = [\ln|\cos x|]' = \dfrac{1}{\cos x}(\cos x)' = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$, si $\cos x \neq 0$.

c) $y' = \ln\left(\dfrac{x - a}{x + a}\right)' = \dfrac{(x + a)(x + a) - (x + a)}{(x - a)(x + a)^2}$.

Problema 18-2 Halle: *a)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$; *b)* $\displaystyle\int_a^b \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx$.

Solución. *a)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x\,dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1|\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln 2.$

b) $\displaystyle\int_a^b \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big|_a^b.$

Problema 18-3 Muestre que la función logaritmo tiene las siguientes propiedades: *a)* $\ln(1) = 0$; *b)* $(\ln x)' = 1/x$, $x > 0$; *c)* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $x > 0$, $y > 0$ (isomorfismo de grupo multiplicativo $\mathbf{R}_+^*$ en el grupo aditivo $\mathbf{R}$).

Solución. La parte *a)* es consecuencia de la definición.

b) Como $\ln x$ es una integral indefinida de una función continua, aplicando el primer teorema fundamental del cálculo se obtiene el resultado.

c) Es consecuencia de la propiedad aditiva de la integral. En efecto,

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \ln(x) + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}$$

Haciendo la sustitución $u = t/x \Rightarrow du = dt/x$, en la última integral se obtiene

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{x\,du}{x\,u} = \ln y;\quad \therefore\quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Otra solución. Sea $a \in \mathbf{R}_+^*$ y considere la aplicación $f(x) = \ln(ax)$ de $\mathbf{R}_+^*$ en $\mathbf{R}$. La derivada de la función es $a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$. Entonces $\ln(ax)$ y $\ln x$ son dos primitivas de $1/x$ y, por consiguiente, existe una constante k tal que $\ln(ax) = \ln x + k$. Para determinar k, sea $x = 1$; entonces $\ln a = k$, de donde $\ln ax = \ln x + \ln a$.

Problema 18-4 Pruebe que $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$.

Solución. Si $x, y > 0$, entonces $\ln x = \ln\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \ln(x/y) + \ln y$, $\therefore$ $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$.

Problema 18-5 Calcule ln 2 empleando la definición y el concepto de sumas superiores e inferiores.

Solución. $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t}$. Sea $P = \{1 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 2\}$ una partición de $[1,2]$ en subintervalos iguales. Como el integrando es una función monótona decreciente tenemos que ,

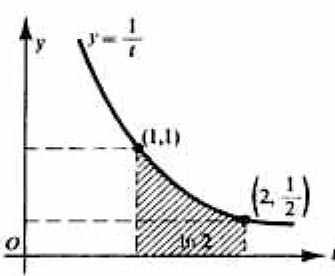


Figura 18-6

$$\left.\begin{aligned} S\left(\frac{1}{t}, P\right) &= \sum_{i=1}^{n} u_i\left(\frac{1}{t}\right)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_{i-1}}\right)\Delta t_i \\ I\left(\frac{1}{t}, P\right) &= \sum_{i=1}^{n} l_i\left(\frac{1}{t}\right)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_i}\right)\Delta t_i \end{aligned}\right. \tag{1}$$

y, por tanto,

$$S\left(\frac{1}{t}, P\right) - I\left(\frac{1}{t}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_{i-1}} - \frac{1}{t_i}\right)\Delta t_i \tag{2}$$

Como aproximación inmediata se tiene que $1/2 \le \ln 2 \le 1$, porque $1/2 \le 1/t \le 1$ sobre $[1,2]$, entonces $(1/2)(1) \le \int_1^2 \frac{dt}{t} \le (1)(1)$. (Vea Fig. 18-6.)

Para fijar las ideas supongamos que P_1 es una partición de $[1,2]$ en 10 subintervalos iguales. Entonces $\Delta t_i = \frac{1}{10}$ para $i = 1, 2, \ldots, 10$ y $t_i = 1 + i \cdot 10^{-1}$ $\Rightarrow$ $P_1 = \{1; 1{,}1; 1{,}2; 1{,}4; 1{,}5; 1{,}6; 1{,}7; 1{,}8; 1{,}9; 2\}$. (1) y (2) para $P = P_1$ son:

$$\left.\begin{aligned} (3)\quad S\left(\frac{1}{t}, P_1\right) &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1{,}1} + \ldots + \frac{1}{1{,}9}\right)\frac{1}{10} \\ (4)\quad I\left(\frac{1}{t}, P_1\right) &= \left(\frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}2} + \ldots + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &S\left(\frac{1}{t}, P_1\right) - I\left(\frac{1}{t}, P_1\right) = \\ &= \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{20} \end{aligned} \tag{5}$$

Según (5) se puede aceptar a (3) o (4) como aproximantes de ln 2, cometiendo un error de 1/20.

Generalizando el procedimiento anterior a una partición P_k de $[1,2]$ dividido en 10^k subintervalos iguales, entonces $P_k = \{1 = t_0, \ldots, t_{10^k} = 2\}$, y:

(6) $\Delta t_i = 10^{-k}$ y $t_i = 1 + i \cdot 10^{-k}$

$$\left.\begin{aligned} (7)\quad S\left(\frac{1}{t}, P_k\right) &= \sum_{i=1}^{10^k} \frac{1}{t_{i-1}} = \sum_{i=1}^{10^k} \frac{1}{1 + (i-1)\cdot 10^{-k}} \cdot \frac{1}{10^k} \\ (8)\quad I\left(\frac{1}{t}, P_k\right) &= \sum_{i=1}^{10^k} \frac{1}{t_i} = \sum_{i=1}^{10^k} \frac{1}{1 + i \cdot 10^{-k}} \cdot \frac{1}{10^k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S\left(\frac{1}{t}, P_k\right) - I\left(\frac{1}{t}, P_k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{10^k} \left(\frac{1}{t_{i-1}} - \frac{1}{t_i}\right)\Delta t_i = \frac{1}{10^k} \sum_{i=1}^{10^k} \left(\frac{1}{t_{i-1}} - \frac{1}{t_i}\right) = \frac{1}{10^k}\left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_{10^k}}\right) = \frac{1}{10^k}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10^k}\cdot\frac{1}{2}$$

Se puede aceptar a (6) o (7) como una aproximación de ln 2, cometiendo un error de $(0{,}5)10^{-k}$.

Problema 18-6 Muestre que para todo homomorfismo del grupo $(G, \times)$ en el grupo $(G', +)$ la función $\ln x$ verifica la siguiente propiedad: $\forall a \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall p \in \mathbf{Z}$, $\ln a^p = p \ln a$.

Solución. 1. Recurrencia sobre p. La operación es verdadera para $p = 0$; si se supone que es verdadera para p, entonces:

$$\ln a^{p+1} = \ln a^p + \ln a = p \cdot \ln a + \ln a = (p + 1) \ln a$$

Lo cual demuestra que la propiedad se cumple para todo $p \in \mathbf{N}$.

2. Vamos a demostrar que la propiedad también se cumple para $-p \in \mathbf{N}$. Si $ab = 1 \Rightarrow \ln a + \ln b = 0$, entonces $\ln(1/a) = -\ln a$.

Si $-p \in \mathbf{N}$, por 1: $a^p = \dfrac{1}{a^{-p}} \Rightarrow \ln a^p = -\ln a^{-p} = p \ln a$. Lo cual demuestra la propiedad.

Problema 18-7 Demuestre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Solución. Sea $b \geq 2$ la base de un sistema de numeración. Para todo número real x sea $n + 1$ el número de cifras de la representación de x en la base b. Entonces $b^n \leq x < b^{n+1}$. Como la función $\ln x$ es creciente, se tiene que $\ln b^n \leq \ln x < \ln b^{n+1}$, y aplicando el Problema 18-3, $n \cdot \ln b \leq \ln x$. Cuando $x \to +\infty$. Entonces $n \cdot \ln b \to +\infty$ (porque $b \geq 2 \Rightarrow b > 0$). La desigualdad anterior muestra con más razón que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. Si en esta relación se hace $1/x = y$, entonces cuando $x \to +\infty$, $y \to 0^+$. Además, $\ln x = -\ln y$, lo cual muestra que $\lim\limits_{y \to 0^+} \ln y = -\infty$.

Problema 18-8 Muestre que la imagen $\ln(\mathbf{R}_+^*)$ es $\mathbf{R}$.

Solución. En efecto, como $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, entonces, para todo $y_0 > 0$, existe un $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tal que $x > x_0 \Rightarrow \ln x > y_0$.

De la misma manera, como $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, para todo $y_0 < 0$ existe un $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tal que $0 < x < x_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \ln x < y_0$.

Como $\ln x$ es un homeomorfismo de $\mathbf{R}_+^*$ sobre $\ln(\mathbf{R}_+^*)$, el problema queda demostrado. La función $y = \ln x$ es un homeomorfismo de $\mathbf{R}_+^*$ sobre $\mathbf{R}$ y un isomorfismo del grupo multiplicativo de $\mathbf{R}_+^*$ sobre el grupo aditivo de $\mathbf{R}$.

Problema 18-9 Muestre que si $x \to +\infty$, entonces $\ln x/x \to 0$.

Solución. Sea $x > 1$. Vamos a mayorar la integral $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$. En efecto, como $t > 1 \Rightarrow t > \sqrt{t} \Rightarrow$ $\Rightarrow 1/t < 1/\sqrt{t}$. En consecuencia, para $x > 1$, $0 < \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$. Como una primitiva de $1/\sqrt{t}$ es $2\sqrt{t}$, entonces $0 < \ln x < 2(\sqrt{x} - 1) < 2\sqrt{x}$, de donde $0 < \ln x/x < 2/\sqrt{x}$. Cuando $x \to +\infty$, la función de la derecha tiende a 0 y, por tanto, $\ln x/x \to 0$ si $x \to +\infty$.

Problema 18-10 Muestre que $(e^x)' = e^x$.

Solución. Tenemos que la derivada de la función recíproca f^{-1} está dada por $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Entonces $(e^x)' = \dfrac{1}{(\ln)' \circ e^x}$. Como la derivada de $y = \ln y$ es $1/y$, entonces $\dfrac{1}{(\ln)' \circ e^x} = e^x$.

Problema 18-11 Muestre que: *a)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; *b)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; *c)* $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Solución. *a*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x}$, que es la derivada de $y = e^x$ para $x = 0$, y como la derivada de e^x en $x = 0$ es 1, entonces $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x} = 1$.

b) Si $x \to +\infty$ la expresión e^x/x toma la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Sea $x = \ln t \Rightarrow e^x = t$. Entonces $e^x/x = t/\ln t$ y si $x \to +\infty$, $t \to +\infty$, de donde $\lim\limits_{x \to +\infty} (t^{-1} \cdot \ln t) = 0$.

c) Si $x \to -\infty$, la expresión $x \cdot e^x$ toma la forma $-\infty \cdot 0$. Sea $e^x = t \Rightarrow x = \ln t$. Entonces $x \cdot e^x = t \ln t$ y $x \to -\infty \Rightarrow t = e^x \to 0^+$, de donde $\lim\limits_{t \to 0^+} t \cdot \ln t = 0^-$.

Problema 18-12 Si u es una función derivable en todo intervalo donde no se anula, muestre que la función $F(x) = \ln |u(x)|$ es derivable y su derivada es $\dfrac{u'}{u}$.

Solución. Como se supone que u es derivable, entonces es continua, y en dicho intervalo, como no se anula, u es positiva o negativa.

Supongamos que $u(x) > 0$. Entonces, por la regla de derivación en cadena, $F'(x) = (\ln u)' \cdot u'(x)$.

Si $u(x) < 0$, sea $-u(x) = v(x)$; entonces $v(x) > 0$ y $|u(x)| = v(x)$. Entonces $F'(x) = (\ln v)' \cdot v'(x) = \dfrac{1}{v(x)} [-u'(x)] \Rightarrow F'(x) = \dfrac{u'}{u}$.

Problema 18-13 Se llama derivada logarítmica de una función $u(x)$ la relación u'/u. Halle la derivada de las siguientes funciones:

$$a)\ y = u(x) \cdot v(x); \quad b)\ y = 1/u; \quad c)\ y = \frac{\operatorname{sen} x \sqrt{x^2 + 2}}{(3 - x^3)^{5/2}}; \quad d)\ y = u(x)^{v(x)}$$

Solución. *a*) Sea $y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow \ln y = \ln u(x) + \ln v(x) \Rightarrow y'/y = u'/u + v'/v$.

b) $y = 1/u \Rightarrow \ln y = -\ln u \Rightarrow y'/y = -u'/u$.

c) $\ln |y| = \ln \left\{ \dfrac{|\operatorname{sen} x|\,|\sqrt{x^2 + 2}|}{|3 - x^3|^{5/3}} \right\} = \ln |\operatorname{sen} x| + \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + 2) - \dfrac{5}{3} \ln |3 - x^3| \Rightarrow (\ln |y|)' =$

$$= \frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{2x}{2(x^2 + 2)} - \frac{5(-3x^2)}{3(3 - x^2)} \Rightarrow y' = y \left\{ \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{5x^2}{3 - x^2} \right\} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \sqrt{x^2 + 2}}{(3 - x^3)^{5/3}} \left\{ \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{5x^2}{3 - x^3} \right\}$$

d) $f(x) = u(x) = e^{v(x) \ln u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{v(x) \ln u(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \dfrac{u'(x)}{u(x)} \right] = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \dfrac{u'(x)}{u(x)} \right] = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + u(x)^{v(x) - 1} u'(x)$.

Problema 18-14 Muestre que todos los homomorfismos derivables del grupo multiplicativo $\mathbf{R}_+^*$ en el grupo aditivo de $\mathbf{R}$ son de la forma $y = k \ln x$, con $k \in \mathbf{R}$.

Solución. Sea f una de tales aplicaciones, es decir, f es derivable y para todo $a, x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(ax) = f(a) + f(x)$. Haciendo $a = x = 1$ se obtiene que $f(1) = 0$. Derivando la función $y = f(ax)$ tenemos que $xf'(ax) = f'(a)$. Remplazando en esta expresión a por 1 y haciendo $f'(1) = k$ tenemos que $xf'(x) = k$. Entonces $f(x)$ es una primitiva de k/x y además $f(1) = 0$. Por consiguiente, $f(x) = k \ln x$.

Problema 18-15 Muestre que para cualquier par de números reales α, β estrictamente positivos:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$; *b)* $\lim_{x\to0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$; *c)* $(\alpha > 0$ y $b > 1) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = +\infty$, $(\alpha > 0$ y $b > 1) \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha b^x = 0$.

Solución. *a)* La función se puede escribir: $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta$. Haciendo $x^{\alpha/\beta} = u$, entonces $\ln x = \frac{\beta}{\alpha}\ln u$. Como $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, entonces $\lim_{x\to+\infty} u = +\infty$. Además $\left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\ln u}{u}\right)^\beta$ y teniendo en cuenta que $\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta = 0$.

b) Sea $x = 1/u$. Entonces $\lim_{x\to0^+} u = +\infty$ y $x^\alpha |\ln x|^\beta = \frac{|\ln u|^\beta}{u^\alpha}$.

Según *a)* se obtiene que $\lim_{u\to+\infty}\frac{|\ln u|^\beta}{u^\alpha} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.

c) Como $b^x = e^{x\ln b} = (e^x)^{\ln b}$, si se hace $e^x = u$ se obtiene $b^{\ln u} = u^{\ln b}$.

Para la primera implicación tenemos que $u = e^x \Rightarrow \frac{b^x}{x^\alpha} = \frac{u^{\ln b}}{(\ln u)^\alpha}$. Como $b > 1 \Rightarrow \ln b > 0$ y $\lim_{x\to+\infty} u = +\infty$, basta con aplicar la parte *a)*.

Para la segunda implicación se tiene que $u = e^x \Rightarrow |x|^\alpha b^x = |\ln u|^\alpha u^{\ln b}$. Como $\ln b > 0$ y $\lim_{x\to-\infty} u = 0$ es suficiente aplicar la parte *b)*.

Problema 18-16 Halle: *a)* $\lim_{x\to\infty} a^x$, $0 < a < 1$; *b)* $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\ln x)^n}$; *c)* $\lim_{x\to0^+} x^x$.

Solución. *a)* $\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln a}$. Como $\ln a < 0$ se tiene que $\lim_{x\to\infty}(x\ln a) = -\infty$; $\therefore$ $\lim_{x\to\infty} e^{x\ln a} = 0$.

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\ln x)^n} = \lim_{y\to\infty}\frac{e^y}{y^n} = \infty$.

c) $\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x}$. Como $\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$, entonces $\lim_{x\to0^+} x^x = 1$, según *b)* del problema anterior.

Problema 18-17 Pruebe que:

$$a)\ e = \lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x; \quad b)\ e^a = \lim_{x\to\infty}(1 + a/x)^x; \quad c)\ \ln b = \lim_{x\to\infty} x(b^{1/x} - 1)$$

Solución. *a)* $e = \exp(1) = \exp\left[\lim_{x\to\infty} x\ln(1 + 1/x)\right] = \lim_{x\to\infty}\exp[x\ln(1 + 1/x)] = \lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x$, por ser continua la función exponencial.

b) $e^a = \left[\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x\right]^a = \lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^{ax} = \lim_{ax\to\infty}(1 + 1/x)^{ax} = \lim_{y\to\infty}(1 + a/y)^y$.

c) Si $f(x) = e^{bx} \Rightarrow f'(0) = b$; por tanto, $\lim_{y\to0}\frac{e^{by} - 1}{y} = b$. Así, $\lim_{x\to\infty} x(e^{b/x} - 1) = b$. Entonces $\ln b = \lim_{x\to\infty} x(e^{\ln b/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} x(b^{1/x} - 1)$.

Problema 18-18 Pruebe que si: *a)* $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, entonces $f = 0$; *b)* halle todas las funciones que satisfacen la relación $f'(t) = f(t) + \int_0^1 f(t)\,dt$.

Solución. *a*) Como $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, entonces f es continua y por tanto, $f'(x) = f(x)$ y existe c tal que $f(x) = ce^x$. Pero $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$; $\therefore$ $f = 0$.

b) Se tiene que $f''(t) = f'(t)$; $\therefore$ $f'(t) = ce^t$ para algún c; entonces $f(t) = a + ce^t$ para algún a. Ahora, $ce^t = (a + ce^t) + \int_0^1 (a + ce^t)\,dt = a + ce^t + a + ce - c \Rightarrow a = c(1 - e)/2$. Es decir, $f(t) = \dfrac{c(1-e)}{2} + ce^t$.

Problema 18-19 Demuestre por recurrencia que $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} \le e^x$, $\forall x \ge 0$.

Solución. Para $n = 0$ se tiene que $1 \le e^x$, $\forall x > 0$, que es verdadera porque $e^0 = 1$. Suponga que la desigualdad se verifica para n. Sea $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow f(x) = 1 + x + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} \le e^x$ y $f(0) = e^0 = 1$. Entonces $f(x) \le e^x$, $\forall x \ge 0$.

Problema 18-20 Muestre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$ empleando la desigualdad del problema anterior y después aplicando la regla de L'Hospital.

Solución. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} \ge \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + x + \ldots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x^n} + \dfrac{1}{x^{n-1}} + \ldots + \dfrac{x}{(n+1)!}\right) = \infty$. Por L'Hospital, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n!} = \infty$.

Problema 18-21 Halle los máximos y minimos de $y = \ln x/x$, y emplee este resultado para mostrar que $\pi^e > e^\pi$.

Solución. $y = \ln x/x \Rightarrow y' = \dfrac{x\dfrac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$.

$$\text{Ahora } y'' = \frac{x^2\left(-\dfrac{1}{x}\right) - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2(1 - \ln x)}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

$$y''(e) = \frac{-3 + 2\ln e}{e^3} = \frac{-3 + 1}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0.$$

Por tanto, en $x = e$ hay un máximo. Por tener f un máximo en e, entonces

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow e \ln \pi > \pi \ln e \Rightarrow \pi^e > e^\pi$$

Problema 18-22 Pruebe que si f es una función continua y $f(x + y) = f(x)f(y)$, entonces $f = 0$ o $f(x) = [f(1)]^x$, $\forall x$.

Solución. Suponga que $f \ne 0$. De $f(x + 0) = f(x)\cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$. Entonces de $1 = f(0) = f[x + (-x)] = f(x)f(-x)$ se obtiene que $f(x) \ne 0$, $\forall x$. Como $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 \Rightarrow f(x) > 0$, $\forall x$. Si n es un número natural, entonces $f(n) = f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1)^n$.

Problema 18-23 Halle la vida media del radio si se sabe que 0,5 $^0/_0$ se pierde por radiación en 12 años.

Solución. Sabemos que $f(t) = ke^{kt}$, siendo $f(t)$ la cantidad que queda al cabo de t años. Entonces $f(12) = k - 0{,}005k \Rightarrow 0{,}995k = ke^{12k} \Rightarrow e^k = (0{,}995)^{1/12}$. Es decir, $f(t) = (0{,}995)^{t/12}\cdot k$. Si t representa la vida media en años, se tiene $k/2 = k(0{,}995)^{t/12} \Rightarrow t = \dfrac{-12\ln 2}{\ln(0{,}995)} = 1660$ años.

Problema 18-24 Se tienen 10 g de una sustancia radiactiva y al cabo de un año hay 5 g. ¿Qué cantidad queda al cabo de dos años?

Solución. Sea $f(t)$ la cantidad que hay en un tiempo t; estamos interesados en $f(2)$. Como la razón de descomposición es proporcional a la cantidad que queda, se tiene que $f'(t) = kf(t)$. Resolviendo esta ecuación para k e integrando ambos lados con respecto a t se obtiene $\ln f(t) = kt + c$. Como $f(0) = 10$, entonces $\ln 10 = c$. Por tanto, $\ln f(t) = kt + \ln 10$ o $\ln \frac{f(t)}{10} = kt$. Como $f(1) = 5$, remplazando en la ecuación anterior se obtiene

$$\ln \frac{5}{10} = k \cdot 1 \text{ o } k = \ln \frac{1}{2},\ \ln \frac{f(t)}{10} = t \cdot \ln \frac{1}{2} \text{ o } f(t) = 10e^{t \ln \frac{1}{2}} = 10e$$

Entonces $f(2) = 10\left(\frac{1}{4}\right) = 10/4 = 5/2$ g.

Problema 18-25 La ley de enfriamiento de Newton dice que la razón de cambio de la temperatura de un cuerpo (inmóvil) es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea. Si $f(t)$ y $A(t)$ representan la temperatura del cuerpo y el medio que lo rodea, respectivamente, entonces la ley de Newton se escribe:

$$f'(t) = k[f(t) - A(t)] \tag{1}$$

Suponga que una barra de metal se sumerge en un recipiente con agua cuya temperatura se conserva constante a 20° C. Su temperatura cambia de 50 a 40° C en 2 minutos. Halle la temperatura al cabo de 6 minutos.

Solución. $f(0) = 50$, $f(2) = 40$, $A(t) = 20$, y se quiere hallar $f(6)$. Resolviendo (1) para k e integrando se encuentra que $\ln[f(t) - 20] = kt + c$. Se halla que $c = \ln 30$. Así, $\ln[f(t) - 20] = kt + \ln 30$ o $\ln \frac{f(t) - 20}{30} = kt$. Remplazando $f(2) = 40$ en (1) se obtiene $k = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$, entonces $\ln \frac{f(t) - 20}{30} = \frac{t}{2} \ln \frac{3}{2}$ o $f(t) = 30e^{\left(\frac{t}{2}\right) \ln \frac{3}{2}} + 20$. Como $e^{\left(\frac{t}{2}\right) \ln \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{t/2}$, tenemos que

$$f(t) = 30\left(\frac{2}{3}\right)^{t/2} + 20 \text{ y } f(6) = 30\left(\frac{2}{3}\right)^{3} + 20 = \frac{260}{9}\ ^{\circ}\text{C}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Verifique que: *a)* $(\ln^2 u)' = 2 \ln u/u,\ u > 0$; *b)* $D_s[\ln(s + 2)] = \frac{1}{s + 2},\ s > 2$; *c)* $D_v(v \ln v - v) = \ln v,\ v > 0$; *d)* $D_x \ln \sec x = \operatorname{tg} x$; *e)* $D_t \ln(\operatorname{cosec} t - \operatorname{cotg} t) = \operatorname{cosec} t$; *f)* $D_x \ln \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$; *g)* $D_v \ln[\ln(\ln v)] = \frac{1}{v \ln v \cdot \ln(\ln v)}$; *h)* $D_x \ln \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} - \frac{1}{x}$.

2. Verifique que:

a) $D_x \int_1^{x^2} \frac{dt}{t} = \frac{2}{x}$, si $x \neq 0$; *b)* $D_x \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{dt}{t} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, si $\operatorname{sen} x \neq 0$; *c)* $D_x \int_1^{\ln x} \frac{dt}{t} = \frac{1}{x \ln x}$, si $x > 1$.

3. Calcule: *a)* $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2x^2 + 1}$; *b)* $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$; *c)* $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

4. Aplique el teorema de acotación para integrales definidas (Problema 2-13) y verifique que: *a)* $1 - 1/x < \ln x < x - 1$ si $x > 1$; *b)* si $x = 1 + h$, entonces $\frac{h}{1 + h} < \ln(1 + h) < h$, y, por tanto, $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h) - \ln h}{h} = 1$. Relacione este resultado con la derivada de $\ln x$ en 1.

5. Suponga que f es una función definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ tal que $f(ab) = f(a) + f(b)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Muestre que: *a)* $f(1) = 0$; *b)* $f(a^{-1}) = -f(a)$; *c)* $f(a^r) = rf(a)$.

6. Suponga que f es una función aditiva, es decir, que $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Muestre que:
a) $f(0) = 0$, $f(-1) = -f(1)$ y $f(n) = nf(1)$, para todo n entero.
b) $f(1/n) = 1/nf(1)$, para todo $n \neq 0$.
c) $f(m/n) = mf(1/n) = m/nf(1)$, m y n entero y $n \neq 0$.
d) $f(x)$ continua sobre $\mathbb{R}$ implica que $f(x) = f(1)x$.

7. Si $1/2 < \ln 2 < 1$ muestre que: *a)* $1 < \ln 4 < 2$; *b)* $n/2 < \ln 2^n < n$; *c)* $-100 < \ln 2^{-100} < -50$.

8. Muestre que: *a)* $2 \ln \sqrt{x^2 - 1} = \ln (x + 1) + \ln (x - 1)$ si $x > 1$; *b)* $\ln (x^4 - 1) = \ln (x + 1) + \ln (x - 1) + \ln (x^2 + 1)$ si $x > 1$; *c)* $\ln \sqrt{|a|} < \ln |a|$ si $|a| > 1$; *d)* $\ln a^2 = 2 \ln |a|$ si $a \neq 0$.

9. Resuelva para $f(x)$, teniendo en cuenta que $\ln u = 0 \Rightarrow u = 1$:
a) $\ln f(x) = \ln x^2 - \ln (x - 1) + 3 \ln (x^3 + 1)$, para $x > 1$.
b) $\ln f(x) = \ln \operatorname{sen} x - \ln \cos x + \ln c$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $c > 0$.
c) $\ln f(x) = \ln g(x)$, $g(x) > 0$.

10. Verifique las siguientes identidades:
a) $\ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\ln (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.
b) $\ln \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) = 2 \ln \operatorname{sen} x - \ln x - \ln (1 + \cos x)$.

11. Resuelva para x: *a)* $x = \ln (\ln^{-1} 2^3)$; *b)* $\ln^{-1} (\ln 2 - \ln 3) = \ln^{-1} x$; *c)* $\ln^{-1} 0/\ln^{-1} x = \ln^{-1} 3$; *d)* $\ln \ln^{-1} x = \ln^{-1} \ln 1$; *e)* $\ln \ln^{-1}(x^2 + 2x - 2) = 5$; *f)* $\ln [\ln^{-1} (\operatorname{sen} 2x)] = 1/2$.

12. Empleando $e^{\ln x} = x$ sobre $]0, +\infty[$ y el álgebra de los logaritmos muestre que:
a) $e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$; *b)* $(e^{\ln 3})^2 = 9$; *c)* $e^{2 \ln 5 - 3 \ln 3} = \frac{25}{27}$; *d)* $e^{(1/2) \ln a^2} = |a|$.

13. Calcule la derivada de las siguientes funciones en los puntos donde exista:
a) $y = \cos a^x$; *b)* $y = \ln a^{x+1}$; *c)* $y = x^x(1 + \ln x)$; *d)* $y = x^{x^x}$; *e)* $y = (\cos x)^{\cos x}$; $y = 2^x + 2^{2^x}$.

14. Muestre que $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^t \, dt = 1$ e $\int_{\ln a}^{\ln b} e^t \, dt = b - a$.

15. Halle la derivada, donde exista, de las siguientes funciones:
a) $y = \lg_a x^3$; *b)* $y = \lg_a |\cos x|$; *c)* $y = a^{\operatorname{sen} x}$; *d)* $y = x^2 3^x$; *e)* $y = \lg_3 (1 - \operatorname{sen} x)$; *f)* $y = 2^{x^3}$; *g)* $y = \ln \ln x$; *h)* $y = \ln \sqrt{x^2 + a^2}$.
Resp.: *a)* $y' = 3x^{-1} \lg_a e$; *b)* $y' = -\operatorname{tg} x \lg_a e$; *c)* $y' = \ln a \cos e^{\operatorname{sen} x}$; *d)* $y' = (2x + x^2 \ln 3)3^x$; *e)* $y' = \frac{-\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} \lg_3 e$; *f)* $y' = 3x^2 2^{x^3} \ln 2$; *g)* $y' = \frac{1}{x \ln x}$; *h)* $y' = \frac{x}{x^2 + a^2}$.

16. Resuelva las siguientes ecuaciones: *a)* $\ln (1 + x) - \ln (1 - x) = 1$; *b)* $\ln \sqrt{x + 1} + \ln (1 - x) - \ln \sqrt{x^2 + 1} = 0$.
Resp.: *a)* $\frac{e - 1}{e + 1}$; *b)* 0; $1 - \sqrt{2}$

17. Halle las siguientes integrales: *a)* $\int 3^{x^2} dx$; *b)* $\int 2^{e^x} dx$; *c)* $\int \cos 5^{\operatorname{sen} x} \, dx$; *d)* $\int e^{\sqrt{x}} x^{-1/2} \, dx$; *e)* $\int \frac{e^x \, dx}{1 + e^x}$; *f)* $\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx$; *g)* $\int \frac{e^{4x} \, dx}{3 + 2e^{4x}}$; *h)* $\int e^{\ln x} \, dx$.
Resp.: *a)* $3^{2x}/2 \ln 3$; *b)* $2^{e^x}/(1 + \ln 2)$; *c)* $5^{\operatorname{sen} x}/\ln 5$; *d)* $2e^{\sqrt{x}}$; *e)* $\ln (1 + e^x)$; *f)* $\frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x}$; *g)* $\frac{1}{8} \ln (3 + 2e^{4x})$; *h)* $\frac{1}{2} x^2$.

18. *a)* Halle todos los c tales que $\ln x = c + \int_c^x \frac{dt}{t}$; $x > 0$.
b) Sea $f(x) = \ln [(1 + x)/(1 - x)]$ si $x > 0$. Si a y b son números dados con $ab \neq -1$ halle todos los x tales que $f(x) = f(a) + f(b)$.
Resp.: *a)* 1; *b)* $(a + b)/(1 + ab)$

19. Si $x > 0$, sea $f(x) = x - 1 - \ln x$, $g(x) = \ln x - 1 + 1/x$. Estudie los signos de f' y g' para mostrar que $1 - 1/x < \ln x < x - 1$, si $x > 0$, $x \neq 1$.

20. Muestre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)}{x} = 1$, empleando el ejercicio anterior, y la definición de [ln (1)]

21. Determine las constantes a y b tales que $e^x = b + \int_a^x e^t\, dt$. *Resp.:* $b = e^a$, a arbitrario

22. Emplee derivación logarítmica para hallar las derivadas de las siguientes funciones: *a)* $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$; *b)* $y = x^{x^x}$; *c)* $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$; *d)* $y = (\text{sen}\, x)^{\cos x} + (\cos x)^{\text{sen}\, x}$.
Resp.: *a)* $y' = a^a x^{a^a - 1} + a x^{a-1} a^{x^a} \ln a + a^x a^{a^x} (\ln a)^2$; *b)* $y' = x^x x^{x^x} \left[\dfrac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2 \right]$;
c) $y' = \dfrac{(\ln x)^{x-1}}{x^{1+\ln x}} [x - 2(\ln x)^2 + x \ln x \ln(\ln x)]$; *d)* $y' = (\text{sen}\, x)^{1+\cos x} [\text{cotg}^2\, x - \ln(\text{sen}\, x)] - (\cos x)^{1+\text{sen}\, x} [\text{tg}^2\, x - \ln(\cos x)]$.

23. Determine x definido por: $2 \ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) + \ln\left(2 - \ln\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$.
Resp.: $x = 2$

24. Muestre que $\dfrac{7}{16} \ln (3 + 2\sqrt{2}) = \dfrac{25}{8} \ln (\sqrt{2} - 1) + 4 \ln (\sqrt{2} + 1)$.

25. Resuelva en **R** las ecuaciones: *a)* $\ln (150 - 25x - x^2) = 3 \ln (5 - x)$;
b) $\ln (x^2 - 1) = \ln (x - 2) + \ln (x - 3)$.

26. Resuelva en **R** el sistema $\begin{cases} xy + x + y = 2 \\ \ln (x + 1) + \ln (y - 1) = 1. \end{cases}$

27. Muestre que $\lg_2 7 \cdot \lg_3 7 + \lg_3 7 \cdot \lg_5 7 + \lg_2 7 \cdot \lg_5 7 = \dfrac{\lg_2 7 \cdot \lg_3 7 \cdot \lg_5 7}{\lg_{30} 7}$.

28. Resuelva en **R** la desigualdad $\lg_2 x > \lg_8 (3x - 2)$.

29. Resuelva en **R** el sistema: *a)* $xy = 256$; *b)* $7 (\lg_y x + \lg_x y) = 50$.

30. ¿Para qué valores reales de a tiene la siguiente ecuación soluciones $2^{x^2 - 2x + 5} = a$?

31. Resuelva en **R** las siguientes ecuaciones: *a)* $x^x = (\sqrt{x})^{x+2}$; *b)* $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$; *c)* $2^{\text{sen}^2 x} = \cos x$.

32. Resuelva en **R** el sistema $a^x = y^a$ y $a^{x+2} = y^{a+1}$.

33. Muestre que para todo $x > 0$ $\log x \leq x/e$.

34. Muestre que para $x > -1$, $\dfrac{x}{x + 1} < \ln (1 + x) \leq x$.

35. Muestre que para todo par de números a y b tales que $0 < b \leq a$ se tiene que

$$\frac{a - b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a + b}{b}$$

36. Compare cuando $x \to \infty$ las funciones definidas por:

$$\begin{array}{ll} x \to a^x \ (a > 1) & \text{y } x \to x^a \\ x \to x^{\ln x} & \text{y } x \to \ln (x)^x \\ x \to (x^x)^x & \text{y } x \to x^{(x^x)} \end{array}$$

37. Determine la forma general de las aplicaciones continuas de **R** en $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ que verifican la relación $f\left(\dfrac{x + y}{2} \right) = \sqrt{f(x)g(x)}$.

38. *a)* Si $n \in \mathbf{N}$, determine la forma general de las aplicaciones continuas de $\mathbf{R}^+$ en $\mathbf{R}^+$ que verifican la relación $f(x) + f(y) = f[(x^n + y^n)^{1/n}]$.
b) Determine la forma general de las aplicaciones continuas de $\mathbf{R}^+$ en $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ que verifican la relación $f(x)f(y) = f[(x^n + y^n)^{1/n}]$.

39. Se consideran las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ definidas de la siguiente manera:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^x,\ f_3(x) = x^{x^x},\ \ldots, f_n(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$$

a) Determine el límite de cada una de las funciones cuando $x \to 0$.
b) Muestre por recurrencia que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_{2p}(x) - 1}{x \ln x} = 1$ y que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_{2p+1}(x) - x}{(x \ln x)^2} = 1$, $(p \geq 1)$.

40. Se considera la ecuación $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_p^x = n^x$, $n \in \mathbf{N}$, y los a_i números reales positivos e inferiores a n, y ordenados como sigue: $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_p$.
a) Muestre que la ecuación tiene una raíz única x_n positiva.
b) Si $n \to +\infty$, entonces $x_n \to 0$ y $x_n \ln n \to \ln p$.

CAPITULO 19

Funciones hiperbólicas

Definición. Se llama seno hiperbólico y se escribe $x \to \operatorname{senh} x$ la función definida por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

De la misma manera se definen las funciones coseno hiperbólico, tangente hiperbólica y cotangente hiperbólica definidas por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,;\ \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,;\ \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

De la definición se deduce que $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$, $\operatorname{tgh} 0 = 0$, $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$, $\cosh(-x) = \cosh x$.

Se llaman funciones hiperbólicas porque se pueden describir como las proyecciones, según el eje X y el eje Y, de los puntos sobre una hipérbola. (Vea Fig. 19-1.)

Sus propiedades algebraicas son análogas a las de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, de las definiciones resulta que $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$, $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$, y multiplicándolas se obtiene $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, etc.

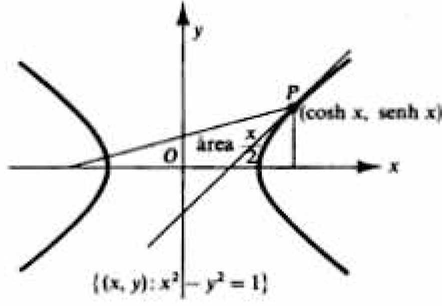


Figura 19-1

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 19-1 Demuestre las siguientes propiedades: *a)* $\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = \cosh 2x$; *b)* $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$; *c)* $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cos x \operatorname{senh} y$; *d)* $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh$; *e)* $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$.

Solución. *a)* $\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x.$

b) $\cosh(x + y) = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} =$
$= \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y.$

c), *d)* y *e)*, verifíquelas.

Problema 19-2 Muestre que las derivadas de las funciones hiperbólicas están dadas por: *a*) $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$; *b*) $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$; *c*) $(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$; *d*) $(\operatorname{cosech} x)' = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x$; *e*) $(\operatorname{tgh} x)' = \operatorname{sech}^2 x$; *f*) $(\operatorname{cotgh} x)' = -\operatorname{cosech}^2 x$.

Solución. *a*) $(\operatorname{senh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

b) $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$

c), *d*), *e*) y *f*), verifíquelas.

Problema 19-3 Halle $\int_0^1 \operatorname{tgh} x\, dx$.

Solución. Como $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$, entonces $\int_0^1 \operatorname{tgh} x\, dx = \int_0^1 \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} dx = \ln \cosh x \Big|_0^1 = \ln \dfrac{e + e^{-1}}{2}.$

Problema 19-4 Resuelva $\cosh x = 2$ para x.

Solución. $\cosh x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 4e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{2}(4 \pm \sqrt{12}) \Leftrightarrow x = \ln (2 \pm \sqrt{3}).$

Problema 19-5 Dé los grafos de las funciones hiperbólicas y analícelas.

Solución. $\cosh x$ tiene las siguientes propiedades: *a*) es positivo; *b*) su dominio es $\mathbf{R}$; *c*) su codominio, $[1, +\infty[$, porque $\cosh 0 = 1$, $\cosh x > 1$ y $\cosh x \geq \dfrac{1}{2} e^x$; *d*) es una función par porque $e^{-x} + e^{-(-x)} = e^x + e^{-x}$, es decir, su grafo es simétrico con relación al eje Y; *e*) $(\cosh x)'' = \cosh x > 0$ en $\mathbf{R}$ y, por tanto, su grafo es cóncavo hacia arriba; *f*) $(0, 1)$ es el punto mínimo del grafo porque $\cosh 0 = 1$ y $(\cosh x)' = 0$ en $x = 0$ y $(\cosh x)'' > 0$ sobre $\mathbf{R}$.

Los demás casos se dejan al lector. Vea las Figuras 19-2 y 19-3.

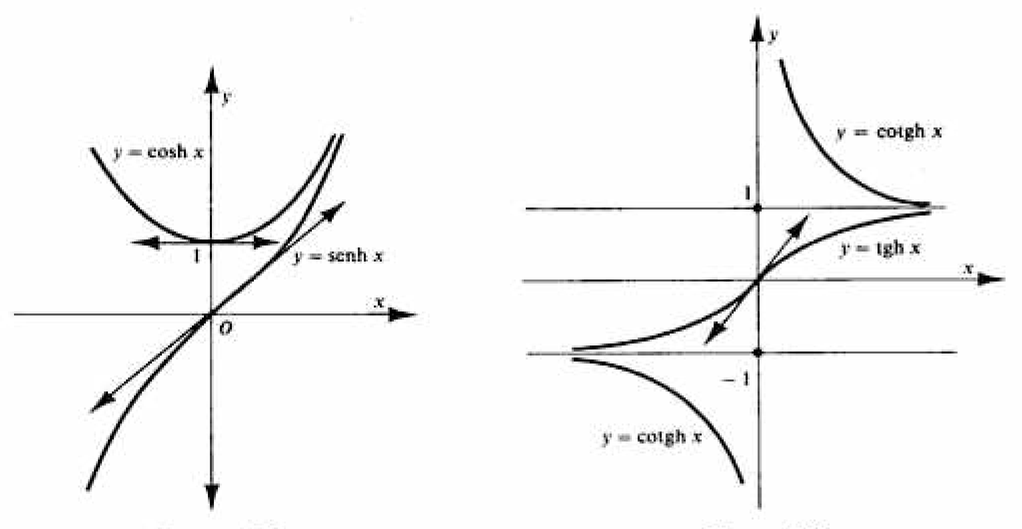


Figura 19-2 Figura 19-3

Funciones recíprocas de las funciones circulares e hiperbólicas

Para definir la función recíproca de una función circular es necesario considerar dicha función sobre un intervalo donde sea continua y monótona.

Función arco seno. La función f definida sobre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ por $y \to$ sen y es continua, estrictamente monótona creciente, y $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$. Es decir, es una biyección y, por tanto, tiene una recíproca que se escribe $y = \text{arc sen } x$.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ x = \text{sen } y \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = \text{arc sen } x$$

La función $g(x) = \text{arc sen } x$ está definida sobre el segmento $[-1, 1]$, es continua, estrictamente monótona creciente, y $g([-1, 1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

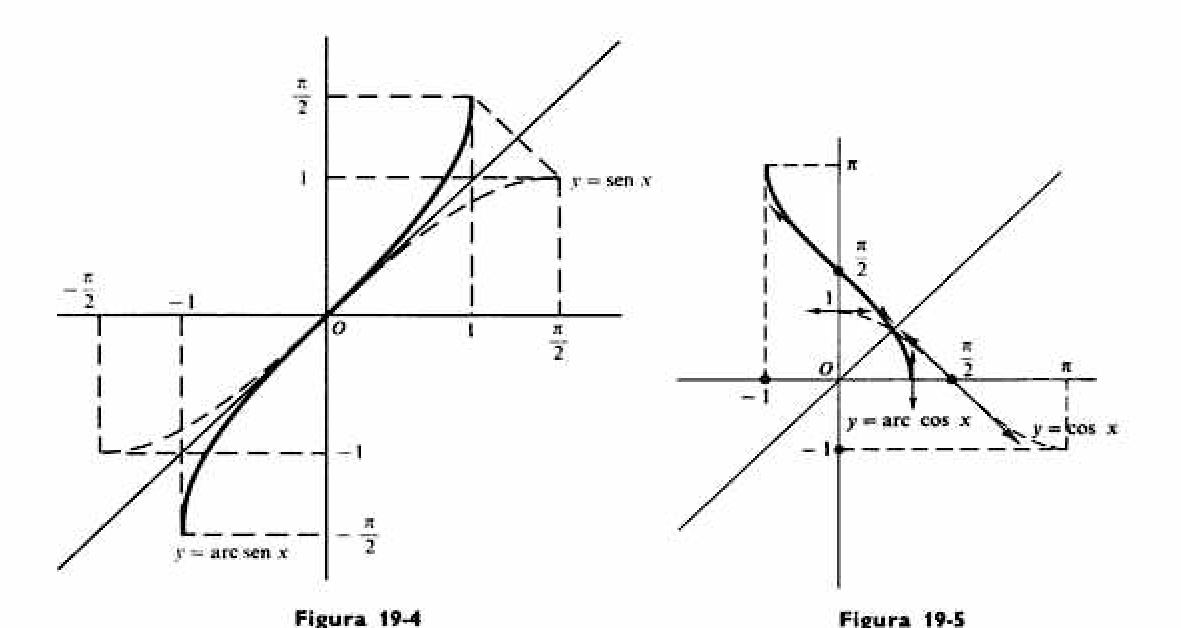


Figura 19-4 **Figura 19-5**

Función arco coseno. La función f definida sobre $[0, \pi]$ por $y \to \cos y$ es continua, estrictamente monótona creciente, y $f([0, \pi]) = [-1, 1]$. Es decir, es una biyección, y la función recíproca se representa por $g(x) = \text{arc cos } x$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq y \leq \pi \\ x = \cos y \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = \text{arc cos } x$$

La función $g(x) = \text{arc cos } x$ se define sobre el segmento $[-1, 1]$, es continua, estrictamente decreciente, y $g([-1, 1]) = [0, \pi]$.

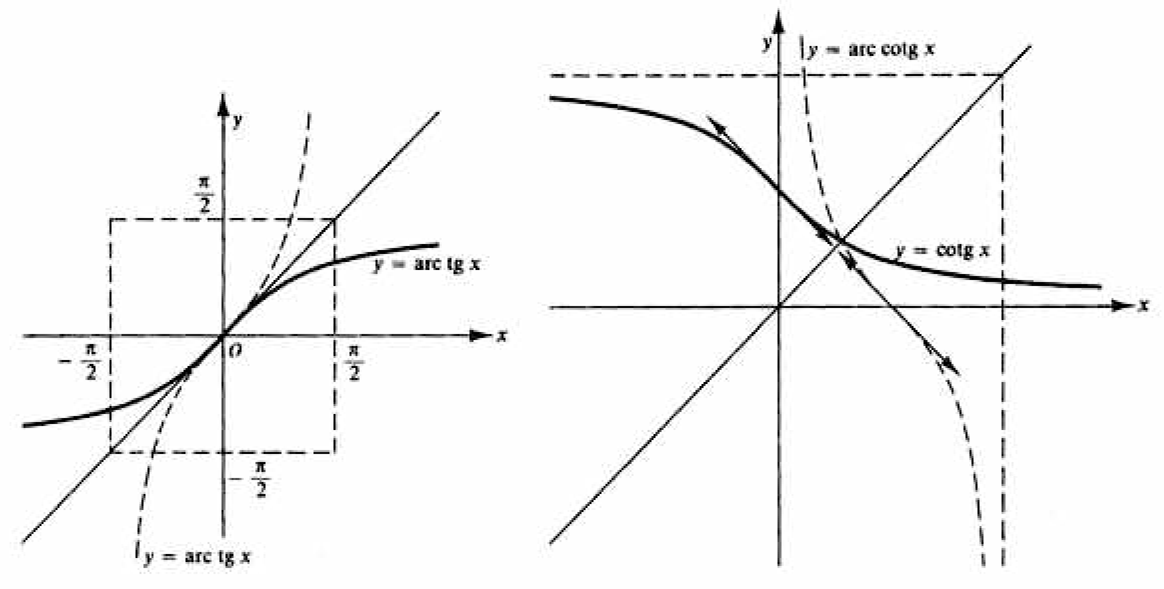


Figura 19-6 **Figura 19-7**

Función arco tangente. La función f, definida en el intervalo abierto $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ por $y \to \operatorname{tg} y$, es continua, estrictamente monótona creciente, y $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbf{R}$, $\lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} f(y) = +\infty$ y $\lim_{y \to -\frac{\pi}{2}^+} f(y) = -\infty$. Como es una biyección, se puede definir la función recíproca g^{-1}, que se escribe $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ x = \operatorname{tg} y \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = \operatorname{arc\,tg} x$$

La función $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ se define sobre $\mathbf{R}$ y sus valores están en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, es continua, estrictamente monótona creciente, y $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Función arco cotangente. La función f definida en el intervalo $]0, \pi[$ por $y \to \operatorname{cotg} y$ es continua estrictamente monótona decreciente, y $f(]0, \pi[) = \mathbf{R}$. Por tanto, biyectiva. Su función recíproca se escribe $y = \operatorname{arc\,cotg} x$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < y < \pi \\ x = \operatorname{cotg} y \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = \operatorname{arc\,cotg} x$$

La función $g(x) = \operatorname{arc\,cotg} x$ se define sobre $\mathbf{R}$ y tiene sus valores en $]0, \pi[$, es continua, estrictamente monótona creciente, y $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,cotg} x = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,cotg} x = \pi$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 19-6 Sea A un subconjunto de **R** y f una función estrictamente monótona de A en **R**, entonces f es inyectiva.

Solución. En efecto, como en **R** el orden estricto es total,

$$x \neq x' \Rightarrow (x < x' \text{ o } x' < x)$$

Si f es estrictamente creciente,

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

La demostración para el caso en que f es decreciente es consecuencia del resultado anterior remplazando f por $-f$.

Consecuencia: Si f es estrictamente monótona de A en **R**, entonces f es una biyección de A sobre $f(A) = B$. La función recíproca f^{-1} existe:

$$[x \in A \text{ y } y = f(x)] \Leftrightarrow [x = f^{-1}(y) \text{ y } y \in B]$$

Además, f^{-1} es estrictamente monótona sobre B.

Problema 19-7 Para toda función f continua y estrictamente continua sobre un conjunto I de reales, la función recíproca f^{-1} es continua sobre $f(I)$ y estrictamente monótona.

Solución. Suponga que f es estrictamente creciente y sea $]a, b[$ un intervalo abierto de I. Entonces $a < x < b \Rightarrow f(a) < f(x) < f(b)$.

Como f es continua, la imagen del intervalo cerrado $[a, b]$ es un intervalo cerrado (vea el Problema 1-43); y por ser f creciente, es el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$. Como existe en $[a, b]$ un único punto a de imagen $f(a)$ por ser f inyectiva (lo mismo se puede decir para b), entonces la imagen del intervalo abierto $]a, b[$ es el intervalo abierto $]f(a), f(b)[$. La función f^{-1} es continua en todo punto $y \in f(I)$, puesto que a todo intervalo abierto $]a, b[$ que contiene a $f^{-1}(y)$, e incluido en I, le corresponde un intervalo abierto $]f(a), f(b)[$, que contiene a y y cuya imagen por f^{-1} es $]a, b[$.

Problema 19-8 *Definición.* Una aplicación f de un intervalo I en **R** se llama homeomorfismo si: *a)* f es una biyección, y *b)* f y f^{-1} son continuas. Muestre que si f es un homeomorfismo sobre un intervalo I, entonces f es estrictamente monótona sobre I.

Solución. Sean $a, b \in I$ tales que $a < b$. Suponga que $f(a) < f(b)$. Vamos a mostrar que $a < x < b \Rightarrow$ $\Rightarrow f(a) < f(x) < f(b)$.

Como f es inyectiva, no se tiene que $f(x) = f(a)$ ni $f(x) = f(b)$. Tampoco puede suceder que $f(x) < f(a)$ ni $f(x) > f(b)$, porque si $f(x) < f(a) < f(b)$ existiría un $y \in]x, b[$ tal que $f(y) = f(a)$, lo cual es contrario al hecho de que f es inyectiva para $y \neq a$.

Esto demuestra la implicación anterior. Cambiando los papeles de a y de x en lo que precede, se halla que

$$(x \in I \text{ y } x < a < b) \Rightarrow f(x) < f(a) < f(b)$$

De la misma manera, cambiando los papeles de b y x, se halla que

$$(x \in I \text{ y } a < b < x) \Rightarrow f(a) < f(b) < f(x)$$

En consecuencia, f es estrictamente creciente sobre I. La demostración para el caso en que f es estrictamente decreciente es análoga.

Problema 19-9 Muestre que las funciones sen x es estrictamente creciente en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; cos x es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$; tg x es estrictamente creciente en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; cotg x es estrictamente decreciente en $]0, \pi[$.

Solución. En efecto, $-\frac{\pi}{2} \le x < x' \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x + x'}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x' - x}{2} \le \frac{\pi}{2}$. Aplicando la fórmula de transformación sen x' − sen x = 2 sen $\frac{x - x'}{2}$ cos $\frac{x' + x}{2}$ y teniendo en cuenta que

$$\frac{x' + x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \frac{x + x'}{2} > 0; \; \frac{x' - x}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{x' - x}{2} > 0,$$

se obtiene que sen x' − sen $x > 0$, de donde $-\frac{\pi}{2} \le x < x' \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ sen $x <$ sen x'. Por tanto, sen x es estrictamente creciente en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Los demás casos se dejan al lector.

Problema 19-10 Si f es derivable en I y $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) para todo $x \in I$, entonces f^{-1} es derivable en $f(I)$ y $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ sobre $f(I)$.

Solución. Si f es creciente (o decreciente) sobre I, según el Problema 19-7, f^{-1} es creciente (o decreciente). Sea $y_0 \in f(I)$ y $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Para cada k tal que $y_0 + k \in f(I)$, defina $h(k) = f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y_0)$.

Como f^{-1} es creciente (o decreciente), $k \ne 0$, entonces $h(k) \ne 0$. Ahora $f^{-1}(y_0 + k) = h(k) + f^{-1}(y_0) = h(k) + x_0$ y $y_0 + k = f(x_0) + h(k)$, entonces

$$\lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{h(k)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{\frac{k}{h(k)}} = \frac{1}{\lim_{k\to 0} \frac{k}{h(k)}} = \frac{1}{\lim_{k\to 0} \frac{f[x_0 + h(k)] - f(x_0)}{h(k)}}$$

si el límite del denominador existe y no es cero. Aplicando el teorema del límite de una función compuesta y como $\lim_{k\to 0} h(k) = \lim_{k\to 0} f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0) = 0$ por ser f^{-1} continua en y_0 y, por hipótesis, $f'(x_0) \ne 0$, entonces

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{\lim_{k\to 0} \frac{f[x_0 + h(k)] - f(x_0)}{h(k)}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}$$

Problema 19-11 Halle f para las siguientes funciones:

$$a)\; f(x) = (x - 1)^3; \quad b)\; f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \ge 0 \\ 1 - x^3, & x < 0 \end{cases}; \quad c)\; f(x) = x + [x]$$

Solución. *a)* $f^{-1}(x) = x^{1/3} + 1$. Si $y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y) = (y - 1)^3$; $\therefore\; y = 1 + x^{1/3}$.

b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} (-x)^{1/2}, & x \le 0 \\ (1 - x)^{1/3}, & x > 1 \end{cases}$. Si $y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y) = \begin{cases} -y^2, & y \ge 0 \\ 1 - y^3, & y < 0 \end{cases}$

Como $-y^2 \le 0$ si $y \ge 0$ y $1 - y^3 > 1$ si $y < 0$, se tiene $y = (-x)^{1/2}$ para $x \le 0$ y $y = (1 - x)^{1/3}$ para $x > 1$.

c) $f^{-1}(x) = x - \left[\frac{x}{2}\right]$.

Si $y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y) = y + [y] = y + n$; para $n \le y < n + 1$.

Así $2n \le x < 2n + 1$ y $y = x - n = x - \left[\frac{x}{2}\right]$.

Problema 19-12 Muestre que la función $y = \text{arc sen } x$ es derivable en $[-1, 1]$ y $D_x \text{ arc sen } x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Solución. Sabemos que $f(y) = \text{sen } y$ es un homeomorfismo de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sobre $[-1, 1]$. La aplicación recíproca $y = \text{arc sen } x$ es un homeomorfismo de $[-1, 1]$ sobre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Si nos restringimos al intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la función $\cos x$ y la función $\text{sen } x$ no se anulan en dicho intervalo y entonces podemos aplicar el Problema 19-10; arc sen x es derivable en

$$]-1, 1[\text{ y } (\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\text{sen}' \circ \text{arc sen}} = \frac{1}{\cos \circ \text{arc sen}}$$

Queda por estudiar la compuesta $\cos \circ \text{arc sen } x$ en $]-1, 1[$. Sabemos que $y = \text{arc sen } x$ implica $x = \text{sen } y$. Entonces $\cos \circ \text{arc sen } x = \cos y$. Como $\cos^2 y = 1 - \text{sen}^2 y = 1 - x^2$ y $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\cos y > 0$, se tiene que $\cos \circ \text{arc sen } x = \sqrt{1 - x^2}$. Entonces

$$D_x \text{ arc sen } x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Problema 19-13 La función $y = \text{arc cos } x$ es derivable en $]-1, 1[$ y

$$D_x \text{ arc cos } x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Solución. $\cos y$ es un homeomorfismo de $[0, \pi]$ sobre $[-1, 1]$, y su recíproca arc cos x un homeomorfismo de $[-1, 1]$ sobre $[0, \pi]$. Si nos restringimos al intervalo $]0, \pi[$, la derivada sen x de cos x no se anula en dicho intervalo; arc cos x es derivable en $[-1, 1]$ y, además,

$$(\text{arc cos } x)' = \frac{1}{\cos' \circ \text{arc cos}} = \frac{-1}{\text{sen} \circ \text{arc cos}}$$

Sabemos que para todo $x \in]-1, 1[$ se tiene que $y = \text{arc cos } x \Rightarrow x = \cos y$. Entonces $\text{sen} \circ \text{arc cos } x = \text{sen } y$. Como $\text{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$ y $x \in]0, \pi[\Rightarrow \text{sen } y > 0$; por tanto,

$$\text{sen} \circ \text{arc cos } x = \sqrt{1 - x^2}$$

Problema 19-14 La función arc tg x es derivable en $\mathbf{R}$ y $D \text{ arc tg } x = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Solución. tg y es un homeomorfismo de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sobre $\mathbf{R}$, y su recíproca arc tg x es un homeomorfismo de $\mathbf{R}$ sobre $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En dicho intervalo la derivada de la función tangente no se anula; entonces, según el Problema 19-10, es derivable y

$$(\text{arc tg})' = \frac{1}{\text{tg}' \circ \text{arc tg}} = \frac{1}{(1 + \text{tg}^2) \circ \text{arc tg}}$$

Como para todo $x \in \mathbf{R}$, $(1 + \text{tg}^2) \circ \text{arc tg } x = 1 + (\text{tg} \circ \text{arc tg } x)^2 = 1 + x^2$. Entonces

$$(\text{arc tg})' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Problema 19-15 La función arc cotg x es derivable en $\mathbf{R}$ y $(\text{arc cotg } x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

Solución. La aplicación arc cotg x es un homeomorfismo de $\mathbf{R}$ sobre $]0, \pi[$. En dicho intervalo, la derivada de la función cotangente no se anula; entonces arc cotg x es derivable en $\mathbf{R}$ y

$$(\text{arc cotg } x)' = \frac{1}{(\text{cotg } x)' \circ \text{arc cotg } x} = \frac{-1}{(1 + \text{cotg}^2 x) \circ \text{arc cotg } x}$$

Como $(1 + \text{cotg}^2 x) \circ \text{arc cotg } x = 1 + (\text{cotg } x \circ \text{arc cotg } x)^2 = 1 + x^2$, entonces $(\text{arc cotg } x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

Recíprocas de las funciones hiperbólicas

Problema 19-16 Defina y estudie la recíproca de la función seno hiperbólico.

Solución. La aplicación senh y es un homeomorfismo estrictamente creciente de $\mathbf{R}$ sobre $\mathbf{R}$; la aplicación recíproca tiene las mismas propiedades.

Definición. La aplicación recíproca de senh y se llama argumento seno hiperbólico y se escribe arg senh x.

$$x, y \in \mathbf{R} \qquad x = \text{senh } y \iff y = \text{arg senh } x$$

Grafo. Su grafo se deduce a partir del grafo de senh x por simetría con respecto a la bisectriz $y = x$.

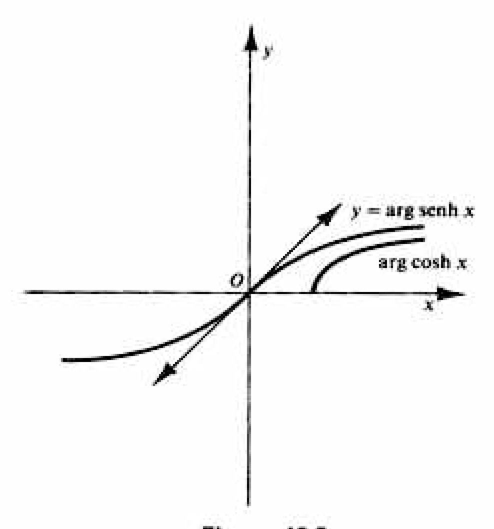


Figura 19-8

Derivada. La fórmula $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ da $(\text{arg senh } x)' = \dfrac{1}{\text{senh } x' \circ \text{arg senh } x} = \dfrac{1}{\cosh x \circ \text{arg senh } x}$.
Vamos a calcular cosh y con $y = \text{arg senh } x$.

$y = \text{arg senh } x \Rightarrow \text{senh } y = x \Rightarrow \cosh^2 y = 1 + x^2 \Leftrightarrow \cosh y = \sqrt{1 + x^2}$, porque para todo $y \in \mathbf{R}$, $\cosh y > 0$. Entonces $(\text{arg senh } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Nota. Se puede expresar arg senh x con la ayuda de la función logarítmica. En efecto, $y = \text{arg senh } x \Rightarrow$ $\Rightarrow (\text{senh } y = x$ y $\cosh y = \sqrt{1 + x^2})$. Por consiguiente, $e^y = \cosh y + \text{senh } y = x + \sqrt{1 + x^2}$, de donde $\text{arg senh } x = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$.

Problema 19-17

Defina y estudie la recíproca de la función coseno hiperbólico.

Solución. La aplicación continua $\cosh y$ no es monótona en $\mathbf{R}$. Su restricción a $\mathbf{R}^+$ es estrictamente creciente; dicha restricción es un homeomorfismo de $\mathbf{R}^+$ sobre $[1, +\infty[$.

Definición. La aplicación recíproca de la restricción de $\cosh y$ a $\mathbf{R}^+$ se llama argumento coseno hiperbólico y se escribe $\operatorname{arg}\cosh x$.

$$y \in \mathbf{R}^+ \qquad x = \cosh y \iff y = \operatorname{arg}\cosh x \qquad x \geq 1$$

Grafo. La Figura 19-8 muestra el grafo de $\operatorname{arg}\cosh x$, que se deduce a partir del grafo de $\cosh x$ por simetría con respecto a la bisectriz $y = x$, $x \in \mathbf{R}^+$.

Derivada. La fórmula $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ da $\operatorname{arg}\cosh' = \dfrac{1}{\cosh' x \circ \operatorname{arg}\cosh x} = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x \circ \operatorname{arg}\cosh x}$, $y = \operatorname{arg}\cosh x \Rightarrow \cosh y = x \Rightarrow \operatorname{senh}^2 y = x^2 - 1$. La raíz existe si $x \geq 1$.

$$y \geq 0 \Rightarrow \operatorname{senh} y \geq 0 \Rightarrow \operatorname{senh} y = +\sqrt{x^2 - 1}, \text{ entonces } (\operatorname{arg}\cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Nota. Se puede expresar $\operatorname{arg}\cosh x$ con la ayuda del logaritmo.

$$y = \operatorname{arg}\cosh x \Rightarrow (\cosh y = x \text{ y } \operatorname{senh} y = \sqrt{x^2 - 1})$$

Entonces $e^y = \cosh y + \operatorname{senh} y = x + \sqrt{x^2 - 1}$, de donde $\operatorname{arg}\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Problema 19-18

Defina y estudie la recíproca de la función tangente hiperbólica.

Solución. La aplicación continua $\operatorname{tgh} y$ es estrictamente creciente sobre $\mathbf{R}$; por tanto, es un homeomorfismo de $\mathbf{R}$ sobre $]-1, 1[$.

Definición. La aplicación recíproca de $\operatorname{tgh} y$ se llama argumento tangente hiperbólica y se escribe $\operatorname{arg}\operatorname{tgh} x$.

$$y \in \mathbf{R} \qquad x = \operatorname{tgh} y \iff y = \operatorname{arg}\operatorname{tgh} x \qquad (x \in]-1, 1[)$$

La aplicación $\operatorname{arg}\operatorname{tgh} x$ es un homeomorfismo estrictamente creciente de $]-1, 1[$ sobre $\mathbf{R}$.

Grafo. Su grafo se deduce a partir del de $\operatorname{tgh} x$ por simetría con respecto a la bisectriz $y = x$.

Derivada. La fórmula $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ da $(\operatorname{arg}\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{tgh}' x \circ \operatorname{arg}\operatorname{tgh} x} = \dfrac{1}{(1 - \operatorname{tgh}^2 x) \circ \operatorname{arg}\operatorname{tgh} x}$.

Entonces $\forall x \in]-1, 1[$, $(\operatorname{arg}\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Nota. Se puede expresar $\operatorname{tgh} x$ por medio de un logaritmo. En efecto, $y = \operatorname{arg}\operatorname{tgh} x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \operatorname{tgh} y = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Rightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

De donde

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \operatorname{arg}\operatorname{tgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

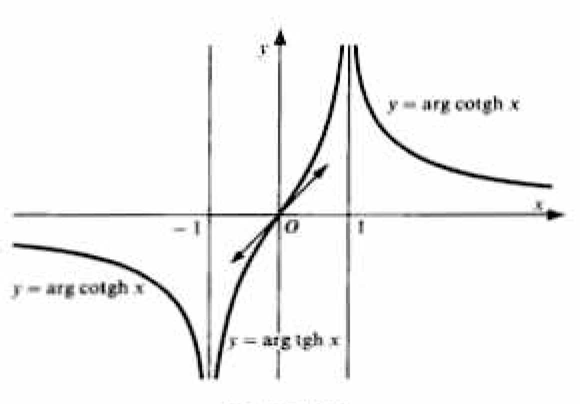


Figura 19-9

Problema 19-19. Defina y estudie la recíproca de la función cotangente hiperbólica.

Solución. La función continua cotgh y es estrictamente decreciente en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$, donde se define. La restricción a $\mathbf{R}_-^*$ es un homeomorfismo de $\mathbf{R}_-^*$ sobre $]-\infty, -1[$ y su restricción a $\mathbf{R}_+^*$ es también un homeomorfismo de $\mathbf{R}_+^*$ sobre $]1, +\infty[$.

Definición. La aplicación recíproca de cotgh y se llama argumento cotangente hiperbólica y se escribe arg cotgh x.

Arg cotgh x es un homeomorfismo de $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ sobre $\mathbf{R}^*$

Grafo. El grafo de arg cotgh x se muestra en la Figura 19-9; se obtiene a partir del grafo de cotgh x por simetría respecto a la bisectriz $y = x$.

Derivada. $(\text{arg cotgh } x)' = \dfrac{1}{\text{cotgh}' x \circ \text{arg cotgh } x} = \dfrac{1}{(1 - \text{cotgh } x^2) \circ \text{arg cotgh } x}$. De donde para todo $x \in \mathbf{R} - [-1, 1]$, $\text{arg cotgh}' x = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Nota. Se puede expresar arg cotgh x por medio de un logaritmo. En efecto, $y = \text{arg cotgh } x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \text{cotgh } y = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \Rightarrow e^{2y} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

De donde para todo $x \in \mathbf{R} - [-1, 1]$, $\text{arg cotgh } x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

Problema 19-20 Calcule: *a*) $\cos^2 (\text{arc sen } x)$; *b*) $\text{sen}^2 (\text{arc cos } x)$; *c*) $\text{tg}^2 (\text{arc sec } x)$; *d*) $\sec^2 (\text{arc tg } x)$; *e*) $\cos (\text{arc sen } x)$; *f*) $\text{sen} (\text{arc cos } x)$; *g*) $\text{tg} (\text{arc sec } x)$.

Solución. *a*) $\cos^2 (\text{arc sen } x) = 1 - \text{sen}^2 (\text{arc sen } x) = 1 - (\text{sen arc sen } x)^2 = 1 - x^2$.

b) $\text{sen}^2 (\text{arc cos } x) = 1 - \cos^2 (\text{arc cos } x) = 1 - (\cos \text{arc cos } x)^2 = 1 - x^2$.

c) $\text{tg}^2 (\text{arc sec } x) = \sec^2 (\text{arc sec } x) - 1 = x^2 - 1$.

d) $\sec^2 (\text{arc tg } x) = \text{tg}^2 (\text{arc tg } x) + 1 = x^2 + 1$.

e) $\cos (\text{arc sen } x) = \pm \sqrt{1 - \text{sen} (\text{arc sen } x)} = \sqrt{1 - x^2}$, puesto que arc sen x tiene su codominio en el primer y cuarto cuadrante.

Problema 19-21 Muestre que $\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución. I. Como $\text{arc sen } x = \dfrac{\pi}{2} - \text{arc cos } x \Leftrightarrow \text{sen} (\text{arc sen } x) = \text{sen} \left(\dfrac{\pi}{2} - \text{arc cos } x \right) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos (\text{arc cos } x) = x$.

II. Sea $\text{arc sen } x = \text{arc cos } x = c$, c una constante. Derivando la expresión se obtiene $(\text{arc sen } x)' = -(\text{arc cos } x)'$. Además $c = \text{arc sen } 0 + \text{arc cos } 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2}$; por tanto, $\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \dfrac{\pi}{2}$.

Problema 19-22 Si $\phi(x)$ representa el ángulo bajo el cual se ve un intervalo $[a, b]$ sobre la parte positiva del eje Y, con un punto x en la parte positiva del eje X, halle el valor máximo de $\phi(x)$.

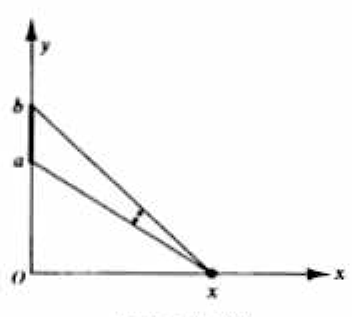


Figura 19-10

Solución. De la Figura 19-10 se obtiene que

$$\phi(x) = \text{arc tg}\,\frac{b}{a} - \text{arc tg}\,\frac{a}{x} \Rightarrow \phi'(x) = \frac{-b/x^2}{1 + (b/x)^2} - \frac{-a/x^2}{1 + (a/x)^2} =$$

$$= \frac{-b(x^2 + a^2) + a(x^2 + b^2)}{(x^2 + b^2)(x^2 + a^2)} - \frac{x^2(a - b) - ab(a - b)}{(x^2 + b^2)(x^2 + a^2)} = \frac{(b - a)(ab - x^2)}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

Como $\phi'(x) > 0$ para $x < \sqrt{ab}$ y $\phi'(x) < 0$ para $x > \sqrt{ab}$, $\phi(ab)$ es el máximo global. Ahora $\phi(ab) =$ $= \text{arc tg}\sqrt{\frac{b}{a}} - \text{arc tg}\sqrt{\frac{a}{b}}$, puesto que $\text{tg}\,\phi(\sqrt{ab}) = \dfrac{\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{a}{b}}} = \dfrac{b - a}{2\sqrt{ab}}$, entonces $\phi(ab) = \text{arc tg}\,\dfrac{b - a}{2\sqrt{ab}}$.

Problema 19-23 Halle el área limitada por la curva $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ el eje de las X entre los puntos $x = -2$ y $x = -\sqrt{3}$.

Solución. El área está dada por $\displaystyle\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$. En el intervalo $[-2, -\sqrt{3}]$, $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} =$ $= -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$; por tanto, $\displaystyle\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} = -\text{arc sec}\,x\,\Big|_{-2}^{-\sqrt{3}}$.

Como $\text{arc sec}\,(-\sqrt{3}) = \text{arc cos}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$, y $\text{arc sec}\,(-2) = \text{arc cos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$, se tiene que

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Verifique que: $\cos(2\,\text{arc sen}\,x) = 1 - 2x^2$;

$\text{sen}\,(2\,\text{arc sen}\,x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$;

$\text{tg}\,(2\,\text{arc tg}\,x) = 2x/(1 - x^2)$;

$\text{sen}\,(\text{arc sen}\,x + \text{arc cos}\,x) = 1$;

$\text{tg}\,(\text{arc sen}\,x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$\text{cosec}^2\,(\text{arc cotg}\,x) = 1 + x^2$.

2. Verifique que: $D_x\,\text{arc cos}\,\dfrac{x}{a} = \dfrac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, |x| < a$;

$D_x\,\dfrac{1}{a}\,\text{arc sec}\,\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}}, |x| > a$;

$D_x\,\dfrac{1}{a}\,\text{arc cosec}\,\dfrac{x}{a} = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}}, |x| > a$.

3. Empleando el criterio de convergencia para integrales definidas, muestre que:

a) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\pi}{12}$; *b)* $\displaystyle\int_{4/\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{\pi}{24}$; *c)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2} = \frac{\pi}{18}$.

4. Verifique las siguientes derivadas:

a) $\left[u \text{ arc tg } u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2)\right]' = \text{arc tg } u;$

b) $\left(\frac{1}{a} \text{ arc cotg } \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a^2 - x^2}$ sobre $\mathbb{R} - [-a, a]$;

c) $[\text{arc sen } (\text{tgh } x)]' = |\text{sech } x|$;

d) $[\text{arg cosh } (\sec x)]' = \begin{cases} \sec x \text{ si tg } x > 0 \\ -\sec x \text{ si tg } x < 0; \end{cases}$

e) $[\text{arg tgh } (\cos x)]' = -\text{cosec } x.$

5. Pruebe que: *a*) $\text{arg senh } x = \cosh \sqrt{x^2 + 1}$;

b) $\text{arc cos } x = \text{arg senh } \sqrt{x^2 - 1}$;

c) $\frac{1}{2}\left(e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} - e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}\right) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

6. Compruebe las siguientes igualdades indicando en cada caso las condiciones que las hacen verdaderas:

a) $\text{arc tg } a + \text{arc tg } b = \text{arc tg } \frac{a + b}{1 - ab}$;

b) $\text{arc sen } a + \text{arc sen } b = \text{arc sen } (a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2})$;

c) $\text{arc cos } a + \text{arc cos } b = \text{arc cos } (ab - \sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - b^2}).$

7. Resuelva la ecuación $\text{arc tg } 2x + \text{arc tg } x = \frac{\pi}{4}$.

8. Simplifique: *a*) $y = \text{arc sen } (2 \text{ sen } x \cos x)$ para $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$;

b) $y = \text{arc tg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ para $0 < x < 2\pi$.

9. Simplifique $\text{arc tg } \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$. *Indicación.* Haga $x = \text{tg } \phi, \ -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$.

10. Demuestre las siguientes fórmulas:

a) $\cosh p + \cosh q = 2 \cosh \frac{p + q}{2} \cosh \frac{p - q}{2}$;

b) $\cosh p - \cosh q = 2 \text{ senh } \frac{p + q}{2} \text{ senh } \frac{p - q}{2}$;

c) $\text{senh } p + \text{senh } q = 2 \text{ senh } \frac{p + q}{2} \cosh \frac{p - q}{2}$;

d) $\text{senh } p - \text{senh } q = 2 \text{ senh } \frac{p - q}{2} \cosh \frac{p + q}{2}$.

11. Pruebe que $x = \ln \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$ implica $\text{tgh } \frac{x}{2} = \text{tgh } \frac{y}{2}$ y $\text{tgh } x = \text{sen } y$ $\cosh x = \frac{1}{\cos y}$.

12. Resuelva el sistema: $\begin{cases} \text{arg senh } x = 2 \text{ arg senh } y; \\ 3 \ln x = 2 \ln y. \end{cases}$

13. Simplifique la función $y = \text{arg cosh} \sqrt{\frac{1 + \cosh x}{2}} - \frac{x}{2}$.

14. Calcule las sumas: $S = \cosh x + \cosh 2x + \ldots + \cosh nx$
$S' = \text{senh } x + \text{senh } 2x + \ldots + \text{senh } nx$ $\quad n \in \mathbb{N}$.

15. Resuelva y discuta el sistema: $\begin{cases} \cosh x + \cosh y = a; \\ \text{senh } x + \text{senh } y = b. \end{cases}$

16. Resuelva y discuta el sistema: $\begin{cases} \cosh x + \text{senh } y = a; \\ \text{senh } x + \cosh y = b. \end{cases}$

17. Calcule la derivada *n*-ésima de $y = e^{-x \cosh a} \cosh (x \cosh a)$.

CAPITULO 20

Aproximación polinomial de las funciones. Desarrollos limitados

El objeto de este capitulo es mostrar que las funciones se pueden aproximar por medio de polinomios en el entorno de un punto. Existen muchas maneras de aproximar una función f por medio de un polinomio. Vamos a estudiar los polinomios que coincidan con f y algunas de sus derivadas en un punto dado.

Por ejemplo, si $f(x) = e^x$, el siguiente grafo muestra la aproximación polinomial del grafo de la función e^x en el punto $(0, 1)$. A medida que aumenta el número de sumandos en los polinomios se obtiene una mejor aproximación de $f(x)$ en un entorno del punto 0.

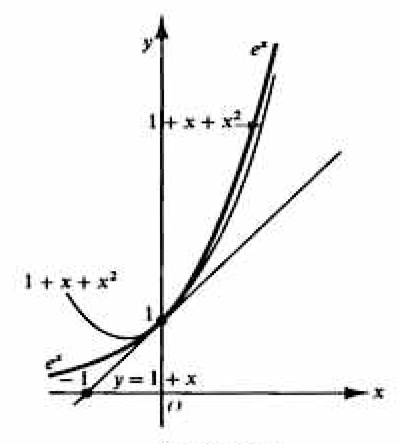


Figura 20-1

Los polinomios y sus derivadas coinciden con e^x en el punto $x = (0, 1)$.

Polinomio de Taylor generado por una función

Todo polinomio de grado $n (n \in \mathbf{N})$ puede escribirse en función de las potencias, hasta de grado n, de $x - a$, en la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots + a_n(x - a)^n, \ \forall a \in \mathbf{R} \qquad (20\text{-}1)$$

como puede comprobarse por la aplicación reiterada de la regla de Ruffini.

Derivando sucesivamente $P_n(x)$ y calculando las derivadas en $x = a$, se obtienen los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$, cuya forma es $a_i = \dfrac{P^{(i)}(a)}{i!}$ $i = 0, 1, \ldots, n$. Luego

$$P_n(x) = P(a) + P'(a)\frac{(x-a)}{1!} + P''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + P^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

La expresión anterior se puede extender, bajo determinadas condiciones, a funciones que no sean algebraicas y enteras, recibiendo en tal caso el nombre de fórmula de Taylor. La aplicación de la misma a tales funciones conduciría a un absurdo, puesto que en ningún caso dichas funciones pueden ser idénticas a un polinomio y, por tanto, hay que agregar al segundo miembro un término que establezca la identidad, llamado término complementario.

Fórmula de Taylor. Si f es continua y tiene derivadas hasta de orden p en un intervalo $[a,b]$, y si el conjunto $X = \{x_0 + \theta h,\ \theta \in]0,1[\} \subset [a,b]$, entonces

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{x-x_0}{1!} + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(p-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{p-1}}{(p-1)!} + R_p(x, x_0)$$

Con $R_p(x,x_0) = \dfrac{(x-x_0)^p(1-\theta)^{p-k}}{k(p-1)!} f^{(p)}[x_0 + \theta(x-x_0)]$, k entero, que es la expresión de Schlömilch del término complementario.

Para $k = 1$ se obtiene la expresión, según Cauchy, del término complementario

$$R_p(x,x_0) = \frac{(x-x_0)^p(1-\theta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}[x_0 + \theta(x-x_0)]$$

Para $k = n$ se obtiene el término complementario de Lagrange, que es el de mayor utilidad en la práctica:

$$R_p(x,x_0) = \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}[x_0 + \theta(x-x_0)]$$

Expresión común de la fórmula de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(x) + R_p(x,h)$$

$$\text{Schlömilch:}\quad R_p(x,h) = \frac{h^p(1-\theta)^{p-k}}{k(p-1)!} f^{(p)}(x+\theta h)$$

$$\text{Lagrange:}\quad R_p(x,h) = \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x+\theta h)$$

$$\text{Cauchy:}\quad R_p(x,h) = \frac{h^p(1-\theta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x+\theta h)$$

Fórmula de McLaurin. Si en la fórmula de Taylor se hace $x_0 = 0$ resulta

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(0) + R_p(0,x)$$

Nota. Los polinomios de Taylor (operadores) P_n verifican las siguientes propiedades:

1. Linealidad: $P_n(c_1 f + c_2 g) = c_1 P_n(f) + c_2 P_n(g)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.
2. Derivación: $(P_n f)' = P_{n-1}(f')$.
3. Integración: $P_{n+1}g(x) = \int_a^x P_n f(t)\,dt$.
4. Si $g(x) = f(cx)$, c una constante, entonces $P_n g(x,a) = P_n f(cx, ca)$.

Propiedad. Si P es un polinomio de grado $n \geq 1$ y f, g dos funciones con derivadas hasta de orden n en 0, y si se supone que $f(x) = P_n(x) + x^n g(x)$, con $g(x) \to 0$ si $x \to 0$, entonces P_n es el polinomio de Taylor generado por f en 0.

En efecto, sea $h(x) = f(x) - P_n(x) = x^n g(x)$. Derivando el producto reiteradamente se obtiene que h y sus n primeras derivadas son 0 en $x = 0$. Por consiguiente, f coincide con P_n y sus primeras n derivadas en 0, entonces P_n es el polinomio de Taylor.

Definición. El error que se comete al aproximar una función f por medio de un polinomio de Taylor P_n en un punto a se define como la diferencia $E_n(x) = f(x) - P_n f(x)$.

Nota. Si f tiene una derivada continua de orden $(n + 1)$ en un intervalo que contiene al punto a, y si $x \in [a - c, a + c]$, entonces $f^{(n+1)}$ es acotada en este intervalo y, por consiguiente, verifica la desigualdad $|f^{(n+1)}(t)| \leq M, M > 0$. Por tanto, la magnitud del error es

$$|E_n(x)| \leq M \frac{|x - a|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Si $x \neq a$, dividiendo la desigualdad anterior por $|x - a|^n$ se obtiene

$$0 \leq \left|\frac{E_n(x)}{(x - a)^n}\right| \leq \frac{M}{(n + 1)!}|x - a|$$

La cual dice que si $x \to a$, $E_n(x)/(x - a)^n \to 0$. Entonces decimos que el error $E_n(x)$ es de menor orden que $(x - a)^n$ cuando $x \to a$.

Desarrollos limitados

Se va a profundizar el cálculo de limites comparando funciones en un entorno de un punto.

Sea I un intervalo de $\mathbf{R}$ de la forma $]a, x_0[$ o $]x_0, b[$.

Sean f y g funciones definidas en I y $k > 0$ tal que para todo $x \in I$ se tiene que $|f(x)| \leq \leq k\,|g(x)|$. Por definición se escribe $f = O(g)$.

Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un intervalo I tal que para todo $x \in I$ se tiene que $|f(x)| \leq \varepsilon\,|g(x)|$, se escribe por definición $f = o(g)$.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$, entonces $f = o(g)$.

Definición. Se dice que dos funciones f y g definidas en un entorno de x son equivalentes si $f - g = o(g)$.

Definición. Se dice que f admite un desarrollo limitado de orden n en un entorno de 0 si $f(x) = = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$. La función polinomial se llama la parte principal o regular y $o(x^n)$ el término complementario.

La definición anterior se puede extender al caso $x_0 = +\infty$ $(0 - \infty)$.

Se dice que f admite un desarrollo de orden n en el entorno de $+\infty$ $(0 - \infty)$ si existe un polinomio $p(x)$ de grado, a lo más igual a n, tal que

$$f(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Desarrollos generalizados

Si para una función $f(x)$ definida en un entorno de 0, excepto posiblemente 0, se supone que existe un real positivo r tal que la función $x^r f(x)$ admita un desarrollo limitado de orden $n > r$ en el entorno de 0. Entonces $f(x) = \dfrac{1}{x^r}(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + o(x^{n-r})$. Se dice que se ha

obtenido un desarrollo generalizado en un entorno de 0. Por ejemplo, el desarrollo generalizado de cotg x en un entorno de $x = 0$ es

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)}$$

Haciendo $r = 1$ se obtiene

$$x \operatorname{cotg} x = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)} = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^5)$$

Por consiguiente, su desarrollo generalizado de orden 4 de cotg x es

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^4)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 20-1 Halle el polinomio de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x_0 = 0$.

Solución. Como $D_x^k \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$, entonces $(D_x^k \operatorname{sen} x)_{x=x_0} = \operatorname{sen} k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 \text{ si } k = 0, 2, \ldots \\ 1 \text{ si } k = 1, \ldots \\ -1 \text{ si } k = 3, \ldots \end{cases}$

Remplazando en (20-1) se obtiene

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} \text{ con } n = 2m \text{ o } n = 2m + 1$$

Problema 20-2 Halle el polinomio de Taylor de $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ y $x = 2$.

Solución. Tenemos que $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo x, entonces $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Remplazando en (20-1) se obtiene

$$P_n(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$P_n(x, 2) = \sum_{k=j}^{n} \frac{e^2}{k!} (x - 1)^k$$

Problema 20-3 Determine los coeficientes de $P(x) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2$ para que el orden de contacto con $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$ sea dos.

Solución. Como $P(1) = a$, $P'(1) = a$, $P''(1) = 2a_2$, $f(1) = \sqrt{1} = 1$, $f'(1) = 1/2(1)^{-1/2} = 1/2$, $f''(1) = -\frac{1}{4}(1)^{-3/2} = -\frac{1}{4}$. Igualando $P^k(1) = f^{(k)}(1)$ para $k = 0, 1, 2$, se obtiene $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$, $a_2 = -1/8$. Asi, $P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2$.

Problema 20-4 (Teorema de Taylor.) Sea $\bar{I} = [a, b]$ un intervalo cerrado e $I =]a, b[$ el intervalo abierto correspondiente. f, $(n + 1)$ veces derivable en $[a, b]$ y $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ continuas sobre $]a, b[$; entonces existe un $c \in I$ tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{b - a}{1!} + f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

con

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \text{para algún } c \in [a, b] \text{ (Lagrange)}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n(x - a) \quad \text{para algún } c \in [a, b] \text{ (Cauchy)}$$

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \text{ si } f^{(n+1)} \text{ es integrable sobre } [a, b]$$

Solución. Sea g la aplicación definida sobre $\bar{I}$ por

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\lambda, \ \lambda \text{ una constante y } g(a) = 0$$

Determinemos λ por la condición $g(b) = 0$. La constante λ está definida por la relacion

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\lambda$$

Según las hipótesis para f, g es n veces derivable sobre $[a, b]$ y continua sobre $]a, b[$. Entonces podemos aplicar el teorema de Rolle a la función g: existe $c_1 \in]a, b[$ tal que $g'(c_1) = 0$. La función g' es derivable en $]a, c_1[$ y $g'(c_1) = 0$ y $g'(a) = 0$. Entonces podemos aplicar el teorema de Rolle a g': existe $c_2 \in]a, b[$ tal que $g''(c_2) = 0$.

Razonando por recurrencia sobre n, se tiene que existe un $c_n \in]a, c_{n-1}[$ tal que $g^{(n)}(c_n) = 0$. $g^{(n)}(x)$ es continua en $[a, c_n]$ y derivable en $]a, c_n[$. Además $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - (x - a)\lambda$ y $g^{(n)}(a) = 0$; y como $g^{(n)}(c_n) = 0$, se puede aplicar el teorema de Rolle a $g^{(n)}$ en el intervalo $[a, c_n]$: existe $c \in]a, c_n[\subset]a, b[$ tal que $g^{(n+1)}(c) = 0$, es decir, $f^{(n+1)}(c) - \lambda = 0$.

Remplazando el valor de λ en (20-1) queda demostrado el resultado.

Nota. (Fórmula de McLaurin.) Si en la fórmula de Taylor se hace $h = b - a$ y $c = a + \theta h$, $\theta \in]0, 1[$, se obtiene

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta h) \qquad (20\text{-}2)$$

El término complementario se llama resto de Taylor. Si en (20-2) se remplaza a por 0, se obtiene

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta h)$$

que se llama fórmula de McLaurin.

Problema 20-5 Pruebe que si $f''(x_0)$ existe, entonces

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}$$

Solución. Empleando el polinomio de Taylor de grado 2 con $x = x_0 + h$ y $x = x_0 - h$ se obtiene

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2!} + R_2(h)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + R_2(-h)$$

Como $\lim_{h\to 0} \frac{R_2(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{R_2(-h)}{h^2} = 0$, entonces $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)+f'(x_0)h+f''(x_0)h^2/2+R_2(h)+f(x_0)-f'(x_0)h+f''\frac{(x_0)h^2}{2}+R_2(-h)-2f(x_0)}{h^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2f''(x_0)h^2}{2}+R_2(h)-R_2(-h)}{h^2} = f''(x_0) + \lim_{h\to 0}\frac{R_2(h)}{h^2} + \lim_{h\to 0}\frac{R_2(-h)}{h^2} = f''(x_0)$$

Problema 20-6 Demuestre el teorema de Taylor con el residuo dado en forma de integral y deduzca las otras formas que existen para el residuo.

Teorema. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado e $I =]a, b[$ el intervalo abierto correspondiente; f, $(n+1)$ veces derivable en $[a, b]$ y f derivable n veces en $]a, b[$; entonces existe un $x_0 \in I$ tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Solución. Como el número necesario de derivadas de f existe en x_0, entonces $f(x)$ se puede escribir de esta manera y R_n se define así:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Sea $g(t) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^n}{k!} \Rightarrow g(x) = f(x)$ y $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ y, por tanto, $R_n(x) = g(x) - g(x_0) =$ $= \int_{x_0}^{x} g'$. Como f tiene derivadas continuas hasta de orden $(n+1)$ en $[a, b]$, entonces g' es continua en el intervalo cerrado con extremos x_0 y x y, por consiguiente, $\int_{x_0}^{x} g'$ existe.

$$g'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\left[-f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} + f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}\right] = f'(t) - f'(t) - \sum_{k=2}^{n} f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n+1} f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$$

Entonces $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

Forma de Lagrange. Como $(x-t)^n$ en la integral, no cambia de signo en el intervalo de integración, y como $f^{(n+1)}$ es continua en este intervalo,

$$\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^x (x-t)^n\,dt = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \ c \in [a, x]$$

Entonces el residuo se puede escribir como $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Con las siguientes hipótesis, $f^{(n+1)}$ existe en el intervalo $]h, k[$, al cual pertenece a, y $f^{(n)}$ es continua en $[h, k]$. Elija a $x \neq a$ en $[h, k]$ y $x > a$. Fije a x y defina a F en el intervalo $[a, x]$ de la siguiente manera:

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

Observe que $F(x) = f(x)$ y $F(a) = P_n(x, a)$; por tanto, $F(x) - F(a) = R_n(x)$. F es continua en $[a, x]$ y derivable en $]a, x[$. Además $F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)$.

Sea G otra función continua sobre $[a, x]$ y derivable en $]a, x[$. Entonces se puede aplicar el teorema del valor medio de Cauchy y obtener

$$G'(c)[F(x) - F(a)] = F'(c)[G(x) - G(a)], \text{ para cualquier } c \in]a, x[$$

Si G' no es cero en $]a, x[$ se obtiene $R_n(x) = \dfrac{F'(c)}{G'(c)}[G(x) - G(a)]$.

Este error se puede expresar de distintas maneras según la elección de G. Por ejemplo, si $G(t) = (x - t)^{n+1}$, se obtiene la forma de Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \; a < c < x$$

Si $G(t) = x - t$, se obtiene la forma de Cauchy:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n(x - a), \; a < c < x$$

Si $G(t) = (x - t)^p$, $p \geq 1$, se obtiene:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x - c)^{n+1-p}(x - a)^p, \; a < c < x$$

Problema 20-7 Muestre que el polinomio de Taylor de grado n para $f(x) = (1 + x)^m$ en 0 es $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k$. Dé al término complementario la forma de Lagrange y la de Cauchy.

Solución. Tenemos que $f^k(x) = m(m - 1) \ldots (m - k + 1)(1 + x)^{m-k}$; por tanto,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k$$

La forma de Cauchy para el término complementario es

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{m!}(1 + t)^{m-n-1}(x - t)(x - 0)$$

La forma de Lagrange para el término complementario es

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)}(1 + t)^{m-n-1}(x - 0)^{n+1}$$

Problema 20-8 *a*) Pruebe que si $x \leq 0 \Rightarrow \left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) Si $-1 < x \leq 0 \Rightarrow \left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)(n+1)}$.

Solución. *a*) $\left| \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x - t)^n \right| = \int_x^0 \frac{e^t}{n!}|x - t|^n \leq \int_x^0 \frac{|x - t|^n}{n!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, porque $e^x \leq 1$, si $x \leq 0$.

b) Para $-1 < x \leq t \leq 0$, se tiene que $0 < 1 + x \leq 1 + t \leq 1$, $0 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x}$; por tanto,

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+x} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}$$

Problema 20-9 Calcule sen 10° con 5 decimales exactos.

Solución. Como seno y todas sus derivadas son 0, y $\frac{10\pi}{180} = \frac{\pi}{18} = 10°$, sea $a = 0$. La fórmula de Taylor para sen x en 0 es sen $x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + R_{n+1}$.

En este problema, sen $\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5 + \ldots + R_{n+1}$.

Como se pide exactitud hasta con cinco decimales, el error debe ser menor que $1 \cdot 10^{-5}$ Ahora

$$\left| R_{n+1} \right| = \frac{|\text{sen } c|}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{n+1} \text{ o } \frac{|\cos c|}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{n+1}$$

que depende de si n es par o impar. En cualquier caso, $\left| R_{n+1} \right| < \frac{1}{(n+1)!}$.

Si $n = 8$, entonces $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{9!} = 0{,}0000027 < 1 \cdot 10^{-5}$.

Así, sen $\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{5040}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7$ es exacto hasta 5 decimales si el valor de π que se emplea es apropiado.

Problema 20-10 Suponga que $f^{(n)}$ es continua en un intervalo $[a, b]$ al cual pertenece x_0 y $f^{(k)}(x_0) = 0$, para $k = 1, \ldots, n-1$, $n \geq 1$. *a*) Si n es par y $f^{(n)}(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, entonces $f(x_0)$ es un mínimo local de f sobre $[a, b]$. *b*) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$, entonces $f(x_0)$ es un máximo local de f en $[a, b]$.

Solución. Empleando la forma de Lagrange para el término complementario en el teorema de Taylor se obtiene $\forall x \in [a, b]$: $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$, $x < c < x_0$.

a) Si n es par y $f^{(n)}(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \geq 0$. Así $f(x) \geq f(x_0)$ y $f(x_0)$ es el mínimo de f en $[a, b]$.

La demostración de *b*) es análoga.

Problema 20-11 Suponga que $f^{(n-1)}$ es continua en un entorno de x_0, y $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \geq 1$. *a*) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces f tiene un máximo en x_0. *b*) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo en x_0. *c*) Si n es impar f no tiene ningún valor extremo en x_0.

Solución. El teorema de Taylor con el término complementario de Lagrange es

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

Aplicando las hipótesis se obtiene $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$, $x < c < x_0$ $\forall x \in V(x_0)$.

a) Si $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces como $f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0}$ existe un entorno $]a, b[$ de x_0 tal que $f^{(n-1)}(x) < 0$ para $x \in]a, x_0[$ y $f^{(n-1)}(x) > 0$ para $x \in]x_0, b[$. ¿Por qué?

Si n es par, entonces para $x \in]a, x_0[$, $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} > f(x_0)$ y para $x \in]x_0, b[$, $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} > f(x_0)$. Es decir, f tiene un mínimo en x_0.

b) Si $f^{(n)}(x_0) < 0$ y n es par, entonces $-f$ tiene un mínimo en x_0, según el problema anterior *a*); por tanto, f tiene un máximo en x_0.

c) Si $f^{(n)}(x_0) > 0$ y n es impar, entonces para $x \in]a, x_0[$, $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} < f(x_0)$ y para $x \in]x_0, b[$, $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} > f(x_0)$.

Así f no tiene un valor extremo en x_0. ¿Por qué?

Si $f^{(n)}(x_0) < 0$ y n es impar, entonces $-f$ no tiene un valor extremo en x_0; por tanto, f no tiene un valor extremo en x_0.

Problema 20-12 Halle los máximos y mínimos de $f(x) = x^2(1 - \cos x) + x^5 \cos 2x$.

Solución. $f'(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 2x(1 - \cos x) - 2x^5 \operatorname{sen} 2x + 5x^4 \cos 2x$; $x = 0$ es una raíz y $f'(0) = 0$; $f''(x) = x^2 \cos x + 4x \operatorname{sen} x + 2(1 - \cos x) - 20x^4 \operatorname{sen} 2x - 4x^5 \cos 2x + 20x^3 \cos 2x$; $f''(0) = 0$; $f'''(x) = -x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x + 6 \operatorname{sen} x - 120x^3 \operatorname{sen} 2x - 60x^4 \cos 2x + 8x^5 \operatorname{sen} 2x + 60x^2 \cos 2x$; $f'''(0) = 0$; $f^{IV}(x) = -x^2 \cos x - 8x \operatorname{sen} x + 12 \cos x + 120x \cos 2x - 480x^2 \operatorname{sen} 2x - 480x^3 \cos 2x + 160x^4 \operatorname{sen} 2x + 16x^5 \cos 2x$; $f^{IV}(0) = 12$. Entonces, por el problema anterior, f tiene un mínimo local en $x = 0$. Halle los demás puntos.

Nota. El problema tiene sus limitaciones teóricas porque, por ejemplo, la función $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -e^{-1/x^2}, & x < 0 \end{cases}$

$f^{(k)}(x_0) = 0$ para todo k y, sin embargo, no tiene máximo ni mínimo en $x_0 = 0$.

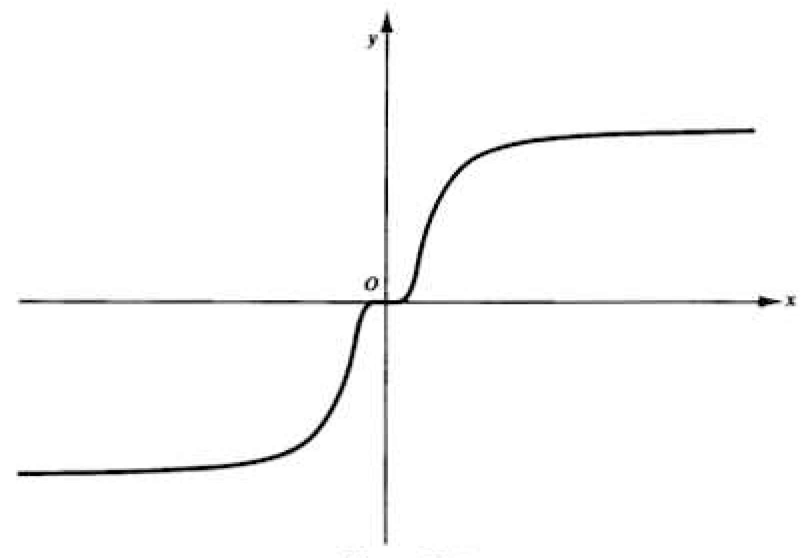


Figura 20-2

Problema 20-13 Escriba $x^2 - 3x + 5$ en potencias de $x - 1$.

Solución. Sea $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Entonces $f(1) = 3$, $f'(1) = -1$ y $f''(1) = 2$. Aplicando el teorema de Taylor se obtiene $f(x) = x^2 - 2x + 3 = \dfrac{3}{0!} + \dfrac{-1}{1!}(x - 1) + \dfrac{2}{2!}(x - 1)^2 = 3 - (x - 1) + (x - 1)^2$.

Problema 20-14 Para $n = 1$, el teorema de Taylor es una fórmula de aproximación por diferenciales con una expresión para el error: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\,dt = f(x_0) + df(x_0, x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)$. Halle $\sqrt{265}$ por el método de los diferenciales y determine el error.

Solución. $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ y $f'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$. Como f'' es continua sobre $]0, +\infty[$, entonces $\sqrt{x} = \sqrt{x_0} + \frac{x - x_0}{2\sqrt{x_0}} - \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} t^{-3/2}(x - t)\,dt = \frac{x + x_0}{2\sqrt{x_0}} - \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} t^{-3/2}(x - t)\,dt.$

El número x_0 se debe tomar próximo a 265 para que sea fácil el cálculo de $\sqrt{265}$. Sea $x_0 = 256$. Entonces $\sqrt{265} = \frac{265 + 265}{32} - \frac{1}{4}\int_{256}^{265} t^{-3/2}(265 - t)\,dt$. Así $\frac{521}{32}$ es una aproximación de $\sqrt{265}$ con un error $=$

$$= \frac{1}{4}\int_{256}^{265} t^{-3/2}(265 - t) \leq \frac{1}{4(256)^{3/2}}\int_{256}^{265}(265 - t) = \frac{1}{16\,384}\cdot\frac{81}{2} < 0{,}003$$

Como $-0{,}003 < R_1 < 0$ y $16{,}281 < \frac{521}{32} < 16{,}282 \Rightarrow 16{,}2782 < \sqrt{265} < 16{,}282$. Es decir, $\sqrt{265} = 16{,}28$ es exacto hasta dos decimales. Si se desea una mayor aproximación para $\sqrt{265}$, se elige $x_0 = (16{,}28)^2$, el cuadrado de la aproximación anterior, y se prosigue como antes.

Entonces $\sqrt{265} = \frac{265 + 265{,}0384}{32{,}56} - \frac{1}{4}\int_{256{,}0384}^{265} t^{-3/2}(265 - t)\,dt.$

Así $\frac{530{,}0384}{32{,}56}$ es una aproximación de $\sqrt{265}$ con error:

$$E_1 = \frac{1}{4}\int_{265{,}0384}^{265} t^{-3/2}(265 - t) \leq \frac{1}{4(256)^{3/2}}\int_{265{,}0384}^{265}(265 - t) = \frac{0{,}00147456}{32768} < 0{,}00000005$$

Como $-0{,}00000005 < R_1 < 0$ y $16{,}728\cdot 82063 < \frac{530{,}0384}{32{,}56} < 16{,}278\cdot 82064$ se obtiene $16{,}17882058 <$ $< \sqrt{265} < 16{,}27882064$. Entonces $\sqrt{265} = 16{,}2788206$, resultado exacto para siete decimales.

Problema 20-15 Sean $x_0 = 0, f(x) = ax^p$, $g(x) = bx^n$, con $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}^*$, $n \in \mathbf{Z}$, $p \in \mathbf{Z}, n \geq p$. *a)* Muestre que en un entorno de $x = 0$: $n \geq p \Rightarrow bx^n = O(ax^p)$. *b)* En un entorno de $+\infty$ $(0, -\infty)$: $n > p \Rightarrow ax^p = o(ax^n)$. *c)* En un entorno de $x = x_0$: $|f(x)| = O(x - x_0)^p$.

Solución. *a)* $g(x) = \frac{b}{a}x^{n-p}f(x)$. Sea $I = [-1, 1]$. Las funciones f y g están definidas en I y además $x \in I \Rightarrow \left|\frac{b}{a}x^{n-p}\right| \leq \left|\frac{b}{a}\right| \Rightarrow |g(x)| \leq \left|\frac{b}{a}\right||f(x)|$. Entonces, en un entorno de $x = 0, n \geq p \Rightarrow bx^n = O(ax^p)$.

La función $\frac{b}{a}x^{n-p}$ es continua en el punto 0. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un intervalo I tal que (si $n > p$) se tiene $x \in I \Rightarrow \left|\frac{b}{a}x^{n-p}\right| \leq \varepsilon$. Entonces, en todo entorno de $x = 0$, $n > p \Rightarrow bx^n = o(ax^p)$.

b) Sea $x_0 = +\infty$, $n > p \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{b}x^{p-n} = 0$; por tanto, en todo entorno de $+\infty$, $n > p \Rightarrow ax^p = o(bx^n)$.

c) Sea x_0 un número real y $f(x) = a_p(x - x_0)^p + a_{p+1}(x - x_0)^{p+1} + \ldots + a_n(x - x_0)^n$ con $p \leq n$ y $a_p \neq 0$. Entonces $f(x) = a_p(x - x_0)^p\left[1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x - x_0) + \ldots + \frac{a_n}{a_p}(x - x_0)^{n-p}\right]$, es decir, $f(x) = a_p(x - x_0)^p[1 + h(x)]$, con $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$. Por tanto, en todo entorno de $x = x_0$,

$$|f(x)| \leq |x - x_0|^p\,|a_p|\,(1 + |h(x)|); \qquad \therefore\ f(x) = O[(x - x_0)^p]$$

Problema 20-16 Sean f y g dos funciones que admiten desarrollos limitados en un entorno de 0; sean $f(x) = p(x) + o(x^n)$ y $g(x) = q(x) + o(x^n)$. Entonces: *a)* $f + g$ admite, en un entorno de 0, el desarrollo limitado $p + q$ de orden n. *b)* La función fg admite en un entorno de 0 un desarrollo limitado de orden n igual al producto de los dos polinomios pq, suprimiendo los términos de grado superior a n. *c)* $1/f$ admite en un entorno de 0 un desarrollo limitado de orden n, igual al cociente de la división, hasta el orden n, según las potencias crecientes de 1 a p. *d)* f/g admite en un entorno de 0 un desarrollo limitado de orden obtenido haciendo la división según las potencias crecientes del polinomio p por q.

Solución. *a)* En efecto, al sumar $f(x) = p(x) + o(x^n)$ y $g(x) = q(x) + o(x^n)$, se obtiene:

$$(f + g)(x) = p(x) + q(x) + o(x^n)$$

b) Las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son acotadas en un entorno de 0; entonces $p \cdot o(x^n) = o(x^n)$; $q \cdot o(x^n) = o(x^n)$; $o(x^n) \cdot o(x^n) = o(x^n)$.

Multiplicando término a término a f y g se obtiene $(fg)(x) = p(x)q(x) + o(x^n)$.

Sea $r(x)$ el resto de la división de pq por x^{n+1}; es un polinomio de grado a, lo más igual a n, que se obtiene al suprimir en el producto pq todos los términos de grado estrictamente superior a n. Entonces $p(x)q(x) = r(x) + o(x^n) \Rightarrow fg(x) = r(x) + o(x^n)$.

c) Sea $f(x) = p(x) + o(x^n)$. Suponga que la valuación del polinomio p es nula, es decir, el menor entero k tal que $a_k \neq 0$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \; a_0 \neq 0$$

Sea $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$. El cociente hasta el orden n de 1 por p, según las potencias crecientes, da lugar a la expresión

$$1 = p(x)q(x) + r(x), \text{ con } v(r) > n \qquad (2)$$

Entonces $r(x) = o(x^n)$. Como $p(x) = f(x) + o(x^n)$, se obtiene al remplazar en (2) que

$$1 = [f(x) + o(x^n)]q(x) + o(x^n)$$

y como $x \to q(x)$ es cotada, $1 = f(x)q(x) + o(x^n)$, y por ser $1/f$ acotada en un entorno de 0 (por ser $a_0 \neq 0$), se obtiene:

$$\frac{1}{f(x)} = q(x) + o(x^n)$$

d) Es consecuencia de las dos propiedades anteriores.

Problema 20-17 Halle el desarrollo limitado de orden n para las siguientes funciones: *a)* $f(x) = e^x$; *b)* $f(x) = a^x$; *c)* $f(x) = \cos x$; *d)* $f(x) = \operatorname{sen} x$; *e)* $f(x) = (1 + x)^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$.

Solución. *a)* $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$. En consecuencia, para todo $x \in \mathbf{R}$;

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

b). Sea $a \in \mathbf{R}_+^*$ y como $a^x = e^{x \ln a}$, entonces para todo $x \in \mathbf{R}$;

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \dots + \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n + o(x^n)$$

c) $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, de donde $f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}$. Por consiguiente,

$$n = 2p \Rightarrow f^{(2p)}(0) = \cos p\pi = (-1)^p; \; n = 2p + 1 \Rightarrow f^{(2p+1)}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = 0$$

En consecuencia, para todo $p \in \mathbf{N}$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$.

d) $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$.

e) $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\dots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$, de donde $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)$. En consecuencia, para todo $x \in]-1, +\infty[$,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Problema 20-18 Halle el desarrollo limitado de orden n de senh x y cosh x.

Solución. $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Por otra parte, según el problema anterior,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ y } e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Entonces, sumando, se obtiene $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$ y

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

Problema 20-19 Halle el desarrollo limitado de orden 3 de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$.

Solución. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{5}{16}x^3 + o(x^3)$. Según el Problema 20-16, multiplicando se obtiene

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{5}{16}\right)x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

Problema 20-20 Halle el desarrollo limitado de orden 5 en un entorno de 0 para la función tg x.

Solución. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$ y $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$.

Efectuando la división hasta el orden 5 se obtiene, según las potencias crecientes, que

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Problema 20-21 Muestre que para que dos funciones f y g verifiquen que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ es necesario y suficiente que $f - g = o(g)$.

Solución. Supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un intervalo $J \subset I$ tal que $x \in J \Rightarrow |f(x)/g(x) - 1| < \varepsilon$, lo cual implica que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon\,|g(x)|$, es decir, $f - g = o(g)$.

Recíprocamente, si esta relación se verifica, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un intervalo $J \subset I$ tal que $x \in J \Rightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon\,|g(x)| \Rightarrow |f(x)/g(x) - 1| < \varepsilon$ y, por tanto, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Problema 20-22 Si f admite un desarrollo limitado de orden n en un entorno de 0, también admite en ese entorno un desarrollo de orden r para todo número natural $r \leq n$.

Solución. Por hipótesis, existe un polinomio $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ tal que $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$.

$k > r \Rightarrow a_k x^k = o(x^r)$. Por otra parte, sabemos que $o(g) + o(g) = o(g)$; entonces, para todo $r < n$, $a_{r+1}x^{r+1} + a_{r+2}x^{r+2} + \dots + a_n x^n = o(x^r) + o(x^r) + \dots + o(x^r) = o(x^r)$.

Por consiguiente, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r + o(x^r)$.

Problema 20-23 Si f admite un desarrollo limitado de orden n en un entorno de 0, ese desarrollo es único.

Solución. Supongamos que f tiene dos desarrollos limitados en un entorno de 0:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$
$$f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$$

y demostremos que para todo $i \in [0, n]$ se tiene $a_i = b_i$. Haciendo la diferencia se encuentra que

$$0 = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n + o(x^n) \tag{1}$$

y razonemos por recurrencia sobre n.

a) La propiedad es verdadera para $n = 0$. En efecto, la función nula 0 admite un desarrollo limitado de orden 0, deducido de (1), suprimiendo todos los términos de grado superior a 0. Entonces $0 = a_0 - b_0 + o(x^0) \Rightarrow a_0 = b_0$.

b) Suponga que $a_i = b_i$ para $0 \le i < n$, y demostremos que $a_n = b_n$.

Por hipótesis de recurrencia, la relación (1) da $0 = (a_n - b_n)x^n + o(x^n) \Rightarrow a_n = b_n$.

Problema 20-24 Sea I un intervalo cerrado con $0 \in I$. Supongamos que la función g es integrable sobre I y que en todo entorno de 0 se tiene $g = o(x^n)$. Entonces $\int_0^x g(t)\,dt = o(x^{n+1})$.

Solución. Por hipótesis para todo $\varepsilon > 0$, existe un intervalo J que contiene a 0 tal que $t \in J \Rightarrow |g(t)| < \varepsilon |t|^n$. Como g es integrable en I, con más razón es integrable en $I \cap J$. En consecuencia, para todo $x \in I \cap J$ y $x \ge 0$:

$$\left| \int_0^x g(t)\,dt \right| \le \int_0^x |g(t)|\,dt \le \varepsilon \int_0^x t^n\,dt = \varepsilon \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Para $x \in I \cap J$ y $x < 0$ se escribe $\left| \int_0^x g(t)\,dt \right| \le \int_x^0 |g(t)|\,dt \le \varepsilon \int_x^0 |t|^n\,dt = \varepsilon \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$.

Problema 20-25 Suponga que la función f admite un desarrollo limitado p de orden n en un entorno de 0 y que además f es integrable en un intervalo cerrado que contiene a 0. Entonces $\int_0^x f(t)\,dt$ admite en el entorno de 0 un desarrollo limitado de orden $n + 1$ idéntico a $\int_0^x p(t)\,dt$.

Solución. Por hipótesis, existe un polinomio p, de grado a lo más n, tal que $f(x) = p(x) + o(x^n)$, y un intervalo cerrado I, que contiene a 0, y en el cual es integrable $f(x)$. Como el polinomio $p(x)$ es integrable, entonces la función $f(x) - p(x) = o(x^n)$ es integrable en I. Según el problema anterior se obtiene

$$\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x p(t)\,dt = o(x^{n+1})$$

Problema 20-26 Halle el desarrollo limitado de $\ln(1 + x)$; arg tgh x; arc tg x; arc sen x.

Solución. Haciendo la división según las potencias crecientes, hasta el orden n, de 1 por $1 - x$, se halla que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

En consecuencia, en todo intervalo I que contiene a 0, y al cual no pertenece 1, se tiene

$$x \in I \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$$

Aplicando el problema anterior, $\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \int_0^x (1 + x + \dots + x^n) + o(x^n)$.

a) Cambiando x por $-x$ se obtiene para todo intervalo I' tal que $0 \in I'$ y $-1 \notin I'$ la relación $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$.

Sumando miembro a miembro se obtiene

$$\arg \operatorname{tgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

b) Para todo $x \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$ y, según el problema anterior, $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

c) Para todo $x \in J$ (J es un intervalo que verifica $0 \in J$, $-1 \notin J$, $1 \notin J$),

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

Integrando para todo $x \in J$ se obtiene

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Problema 20-27 Si las funciones f y g tienen desarrollos limitados p y q de orden n en un entorno de 0, y si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, entonces $g \circ f$ admite, en un entorno de 0, un desarrollo de orden n, obtenido suprimiendo del polinomio compuesto $q \circ p$ los términos de grado superior a n.

Solución. Por hipótesis, $f(x) = p(x) + o(x^n) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$, $g(u) = q(u) = o(u^n) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_n u^n + o(u^n)$. Según el Problema 20-16, para todo $k \in [1, n]$ la función $f^k(x)$ admite un desarrollo limitado de orden n obtenido al suprimir del polinomio $p^k(x) = [a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n]^k$ los términos de grado superior a n.

Según el Problema 20-16, la suma $q \circ p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k[a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n]^k$ admite un desarrollo $r(x)$, de orden n, obtenido al suprimir de $q \circ p$ los términos de grado superior a n. Entonces $q \circ p(x) = r(x) + o(x^n)$. Según los desarrollos de f y g se obtiene $g \circ f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k[a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)]^k + o[f^n(x)]$.

La diferencia $g \circ f - q \circ p$ es el producto de $o(x^n)$ por un polinomio y, por tanto, por una función acotada en un entorno de 0. Por consiguiente, $g \circ f(x) = q \circ p(x) + o(x^n)$, de donde $g \circ f(x) = r(x) + o(x^n)$.

Problema 20-28 Calcule el desarrollo limitado de orden 5, en un entorno de 0, de $\operatorname{senh}[\ln(1+x)]$.

Solución. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ y $\operatorname{senh} u = u + \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + o(u^5)$.

Remplazando el desarrollo de $\ln(1+x)$ es necesario calcular u^3 y u^5.

	x	x^2	x^3	x^4	x^5
u	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}u^3$			$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$
$\frac{1}{120}u^5$					$\frac{1}{120}$

Entonces $\operatorname{senh}[\ln(1+x)] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} + o(x^5)$.

Problema 20-29 Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - \dfrac{12+5x^2}{12-5x^2}}{\operatorname{sen}^2 x}$

Solución. La función dada en un entorno de 0 es de la forma 0/0. Los desarrollos de orden 2 para las funciones sen x y cosh x son $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ y $\operatorname{sen}^2 x = x^2 + o(x^2)$. Haciendo la división según las potencias crecientes da

$$\frac{12+5x^2}{12-5x^2} = 1 + \frac{5}{6}x^2 + o(x^2)$$

Entonces

$$\cosh x = \frac{12+5x^2}{12-5x^2} = -\frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

En un entorno de $x = 0$, la función propuesta se puede escribir como $\dfrac{-\dfrac{x^3}{3} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\dfrac{1}{3} + o(x^2)$. Es decir, el límite buscado es $-1/3$.

Problema 20-30 Calcule $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} a}$, $a > 0$.

Solución. En un entorno de $x = a$, la función propuesta es de la forma 0/0. La fórmula de Taylor para $x = a$ da $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} a + \dfrac{x-a}{1!}\,\dfrac{1}{1+a^2} + o(x-a)$.

Para obtener el desarrollo limitado de $x^a - a^x$ sea $x = a + h$. Entonces

$$(a+h)^a = a^a\left(1+\frac{h}{a}\right)^a = a^a\left[1 + \frac{a}{1!}\,\frac{h}{a} + o(h)\right] \text{ y } a^{a+h} = a^a\cdot a^h = a^a\cdot e^{h\ln a} = a^a[1 + h\ln a + o(h)]$$

Restando miembro a miembro se obtiene $(a+h)^a - a^{a+h} = a^a(1-\ln a)h + o(h)$. Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^a - a^{a+h}}{\operatorname{arc\,tg}(a+h) - \operatorname{arc\,tg} a} = \lim_{h\to 0}\frac{a^a(1-\ln a) + o(h)}{h\dfrac{1}{1+a^2} + o(h)} = a^a(1+a^2)(1-\ln a)$$

Problema 20-31 Calcule: *a)* $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$; *b)* $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x - e^a\right]\operatorname{cotg}\dfrac{1}{x}$.

Solución. *a)* Si $|x|$ está próximo a ∞, entonces $1/x$ está próximo a 0, y la función $y = \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ está definida. Además, $\ln y = x\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$.

Su desarrollo limitado de orden 2 es $\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) = \dfrac{a}{x} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{a^2}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Por consiguiente,

$$\ln y = a - \frac{a^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \tag{1}$$

de donde $\lim\limits_{|x|\to\infty}\ln y = a$ y $\lim\limits_{|x|\to\infty} y = e^a$.

b) Según (1) se tiene que $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = \exp\left[a - \dfrac{a^2}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = e^a\exp\left[-\dfrac{a^2}{2x} + o(1/x)\right]$ Teniendo en cuenta que un entorno de $u = 0$, $e^u = 1 + u + o(u)$, se obtiene

$$\exp\left[-\frac{a^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1 - \frac{a^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Por consiguiente, en un entorno de $|x| = \infty$; $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x - e^a = e^a\left[-\frac{a^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ Además,

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{x} = \frac{\cos\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}} = \frac{1 + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = x + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Para un entorno de $|x| = \infty$ se obtiene $\left[\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x - e^a\right]\cot\frac{1}{x} = -\frac{a^2}{2}e^a + o(1)$; por tanto, el límite pedido vale $-\frac{a^2}{2}e^a$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle los polinomios de Taylor para las siguientes funciones: *a)* $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, grado 3 en 0; *b)* $f(x) = \frac{1}{1+x}$, grado n en 0.

Resp.: *a)* $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$; *b)* $P(x) = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n$

2. Halle los desarrollos limitados de orden 4 para las siguientes funciones en un entorno de $x = 0$: *a)* $f = \ln\frac{\operatorname{sen} x}{x}$; *b)* $f = (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$; *c)* $f = \ln\frac{2-x}{3-x^2}$; *d)* $f = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$; *e)* $f = x(2 + \cos x) - 3\operatorname{sen} x$.

3. Establezca las siguientes desigualdades:

a) $(1 + x)^r \geq 1 + rx$, $x \geq -1$ y $r \geq 1$;

b) $(1 + x)^r \geq 1 + rx + \frac{r(x-1)}{2}x^2$, $x \geq 0$ y $r \geq 2$;

c) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) $x - \frac{x^3}{3!} \leq \operatorname{sen} x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $x \in [0, 3]$

4. Calcule con 4 decimales, empleando polinomios de Taylor: *a)* sen 0,13; *b)* cos 0,13; *c)* $\sqrt[3]{3{,}01}$.

5. Escriba la fórmula de Taylor con término complementario en forma de integral para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbf{R}$ y $a = 0$. Muestre que $|R_{n+1}(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

6. Escriba la fórmula de Taylor con residuo en la forma de Lagrange para:

a) $f(x) = \ln(1 + x)$; $-1 < x < +\infty$, $a = 2$, $n = 4$;

b) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $a = 0$, $n = 3$.

7. Escriba la fórmula de Taylor con residuo en forma de Cauchy para $f(x) = (1 - x)^{1/2}$ $-1 < x < 1$ y $a = 0$.

8. Halle que $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n}(x)$, $|R_{2n}(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $0 \leq x \leq 1$.

Una función f tiene una derivada continua en todas partes y verifica la relación $\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{1/x} = e^3$. Halle $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$

Indicación. Si $\lim_{x\to 0} g(x) = A \Rightarrow g(x) = A + o(1)$ si $x \to 0$.

Resp.: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 4$, $\lim_{x\to 0} = e^2$

9. Halle el polinomio de grado mínimo tal que $\operatorname{sen}(x - x^2) = P(x) + o(x^6)$ si $x \to 0$.

Resp.: $x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{2} - \frac{59x^5}{120} + \frac{x^6}{8}$

10. Empleando la notación «o» halle los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{\pi x - 1}{2x^2} + \dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}\right]$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)^{(\cos x)\operatorname{cotg}^2 x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}}$.

Resp.: *a)* 1; *b)* 0; *c)* $-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; *d)* e

11. Halle los siguientes límites si $x \to 0$:

a) $\dfrac{\ln(\cos \alpha x)}{\ln(\cos \beta x)}$;

b) $\dfrac{\operatorname{senh} x + \operatorname{sen} x - 2x}{x(\cosh x + \cos x - 2)}$;

c) $\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{\operatorname{cotg} x}$;

d) $\dfrac{(\operatorname{sen} x)^x - 1}{x^2 - 1}$;

e) $(a^{(a^x)} - 1)/(a^x - a)$;

f) $\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\operatorname{sen} x/(x - \operatorname{sen} x)}$;

g) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. *Resp.:* 1

h) $(\operatorname{tg} x + \sec x - 1) \ln(e^x - 1)$. *Resp.:* 0

i) $\dfrac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x})}{1 - \cos(\sqrt{4 + x} - 2)}$. *Resp.:* 16

j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt[3]{3x + 5}}{1 - \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}}$;

k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \lg_{10}(x + q)}{e^{\operatorname{sen} x} + \cos n\pi}$;

l) $\lim\limits_{x\to 1} (e^{x^2 + x} - e^{2x})/\cos \dfrac{\pi x}{2}$;

m) $\lim\limits_{x\to a} \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2a)}$;

n) $\lim\limits_{x\to a} (x^a - a^x)/(\lg_a x - \lg_x a)$;

o) $\lim\limits_{x\to a} (\sqrt{x} - \sqrt{a})/(\lg_a x - 1)$;

p) $\lim\limits_{x\to\infty} [x(1 + 1/x)^x - ex^2 \ln(1 + 1/x)]$;

q) $\lim\limits_{x\to\infty} [x - \ln \cosh(\cosh x)]$;

r) $\lim\limits_{x\to\infty} [(x + a)^{1 + 1/x} - x^{1 + 1/(x + a)}]$;

s) $\lim\limits_{x\to\infty} [\operatorname{senh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{senh} \sqrt{x^2 - x}]$;

t) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x \operatorname{tgh} x} \operatorname{senh} x$;

u) $\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt[3]{\ln \operatorname{senh} x} - \sqrt[3]{x}]$;

v) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(\dfrac{\ln(x + 1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x$;

w) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[y]{x + \sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt[y]{x - \sqrt{x^2 - 1}}}{x}$;

x) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{x} + o(1)$;

y) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\dfrac{1}{e} - \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^x\right]$;

z) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = -\dfrac{1}{6}$.

12. Calcule el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \dfrac{1}{e}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2} e^{-x} = 1$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} = 1$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right] = \dfrac{1}{2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2} \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = 1$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{1/x^2}$;

13. Sea $g(x) = x^c e^{2x}$ y $f(x) = \int_0^x e^{2t}(3t^2 + 1)^{1/2}\, dt$. Para un determinado valor de c, el $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'}{g'}$ es finito y $\neq 0$. Determine c y halle el límite.

Resp.: $c = 1$, $\lim = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

14. *a)* Pruebe que si las funciones f y g tienden a $+\infty$ o a 0 cuando $x \to x_0$(θ a $\pm\infty$) y son equivalentes, las funciones $\ln f$ y $\ln g$ son también equivalentes.

b) Si $x \to +\infty$, las funciones definidas por $\ln(e^x - 1)$ y $\ln e^x$ son equivalentes, determine el límite de la función f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.

CAPITULO 21

Cálculo numérico

En este capítulo se van a dar algunas aplicaciones del cálculo para aproximar las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ por varios métodos y el cálculo aproximado de una integral por medio del método de los trapecios.

Definición. Sea f una función numérica, definida y continua y con derivadas suficientes en un intervalo $I \subset \mathbf{R}$. Un número a es un cero o raíz de la ecuación si $f(a) = 0$. Separar los ceros de la función f es determinar los subintervalos $J \subset I$ tales que f admite a lo más un cero en J.

El primer método consiste en estudiar las variaciones de f en I; se determina el signo de f'. Si se conocen los ceros de f, el problema queda resuelto. De lo contrario se repite el mismo proceso con f'.

Separación gráfica de las raíces

Si la ecuación que se va a estudiar es del tipo $f(x) - g(x) = 0$, es útil construir el grafo de las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$. Las abscisas de los puntos comunes a los dos grafos son las raíces de la ecuación propuesta; decimos que hemos separado gráficamente las raíces de la ecuación.

Cálculo de raíces por sustitución

Si se ha determinado un intervalo $I =]a,b[$ donde la función f tiene una raíz r, y una sola, y en el cual es monótona. Para fijar las ideas suponga que f es creciente en I. Elijamos arbitrariamente a $x_1 \in I$ y calculemos $f(x_1)$.

Si $f(x_1) < 0$, entonces $r \in]x_1, b[$ y sea $I_1 =]x_1, b[$. Si $f(x_1) > 0$, entonces $r \in]a, x_1[$ y sea $I_1 =]a, x_1[$.

Así hemos determinado un intervalo I_1 tal que $r \in I_1 \subset I$.

Reiterando el procedimiento para I_1 se obtiene un intervalo I_2 que verifica $r \in I_2 \subset I_1 \subset I$. Así hemos construido una sucesión de intervalos encajados cuyas extremidades encajan la raíz r: la semisuma de las extremidades de I_n es un valor aproximado de r con un error inferior a $l_n/2$; l_n es la longitud de I_n.

Las máquinas electrónicas utilizan el sistema binario y esto hace que utilicen el método anterior, bisecando los intervalos.

Si el intervalo de partida es $I =]a, b[$, a y b son enteros consecutivos. Se elige $x_1 = (a+b)/2$, después la mitad de I_1, y así sucesivamente. Se han obtenido así intervalos encajados cuyas extremidades son los números binarios y en la etapa n-ésima la longitud de I_n es $1/2^n$. La mitad de I_n es un valor aproximado de r.

Límite de la utilización del método

En la mayoria de los casos el cálculo de $f(x)$ está condicionado por el uso de las tablas numéricas y el error que se comete depende de la aproximación de las tablas que se empleen.

METODO DE LAS PARTES PROPORCIONALES. INTERPOLACION LINEAL

En las tablas de funciones se leen los valores de una determinada función f (seno, coseno, etc.) para determinados valores escalonados de la variable. Sean a y b dos de tales valores consecutivos de la variable. Si se quiere determinar $f(x)$ para $x \in]a, b[$, se utiliza el método de la interpolación lineal que consiste en suponer que $f(x) - f(a)$ es proporcional a $x - a$ cuando x recorre el intervalo $I = [a, b]$. Más exactamente se remplaza la función f por la función g definida por

$$\frac{g(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es decir,

$$g(x) = f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)(x - a) \qquad (21\text{-}1)$$

La Figura 21-1 muestra el grafo de f (arco AB) en el intervalo I. g está representada por la cuerda AB. Para todo $x \in I$, y los puntos m: $(x, f(x))$ y p: $(x, g(x))$, se tiene que $f(x) - g(x) = \overline{pm}$.

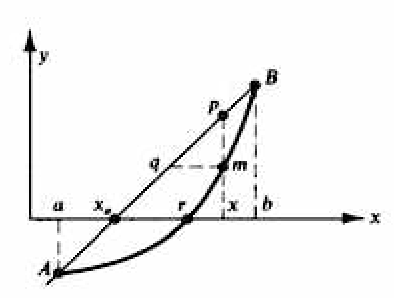


Figura 21-1

Error producido por la interpolación

El error cometido por este método está dado por $\sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$.

Estudiemos la función $h = f - g$. Suponga que f es dos veces derivable en I y la derivada segunda acotada en I. Entonces $h'' = f''$.

La función $|h|$ es continua en el intervalo cerrado I y, por tanto, tiene un extremo superior, es decir, existe $c \in I$ tal que $|h(c)| = \sup_{x \in I} |h(x)|$. Entonces $h'(c) = 0$. Como a y b desempeñan el mismo papel, se puede suponer que c está más próximo de a que de b, es decir,

$$c - a \leq \frac{b - a}{2}$$

Aplicando la fórmula de Taylor al intervalo $[a, c]$, existe $\xi \in]a, c[$ tal que

$$h(a) = h(c) + (a - c)h'(c) + \frac{(a - c)^2}{2} h''(\xi) \;;\; h(a) = 0;\; h'(c) = 0;\; h''(x) = f''(x)$$

y, por tanto,

$$h(c) = -\frac{(a - c)^2}{2} f''(\xi), \text{ de donde } h(c) \leq \frac{(c - a)^2}{2} \sup_{x \in I} |f''(x)|$$

Así hemos obtenido un mayorante para el error debido a la interpolación

$$\varepsilon \leq \frac{(b - a)^2}{8} \sup_{x \in I} |f''(x)|$$

Método de las partes proporcionales

Si f es una función que tiene una única raiz r en $I =]a, b[$, r es la abscisa del punto de intersección del arco AB con el eje X. Calcular r según el método de las partes proporcionales (método de Lagrange) es tomar por valor aproximado de r la abscisa x_0 del punto de intersección del eje X con la cuérda AB. Es decir, se remplaza f por la función g de la interpolación lineal anterior; se toma por valor aproximado de r la raiz x_0 de g; la relación (21-1) da

$$x_0 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Error debido al método

El error que se comete es $|r - x_0|$. Si en I, f' y f'' conservan el mismo signo, entonces $f'f'' > 0$ implica que «x es un aproximante de r por defecto». Si $f'f'' < 0$ implica que «x es un aproximante de r por exceso».

Reiteración del método

Suponga que f tiene una raiz única r en el intervalo $I =]a, b[$ y que $f' > 0, f'' > 0$. Entonces el grafo de f en I es del tipo que muestra la Figura 21-1. Una primera aplicación del método de Lagrange da un valor x_0 aproximado de r por defecto: $a < x_0 < r < b$.

Aplicando de nuevo el método al intervalo $I_1 =]x_0, b[$, se obtiene un valor aproximado x_1 de r por defecto: $x_0 < x_1 < r < b$.

Reiterando el procedimiento, se construye una sucesión creciente $\{x_n\}$ que converge a r. Los intervalos encajados $I_n =]x_n, b[$ tienen el extremo fijo y su longitud no tiende a cero. El error que se calcula en el primer intervalo permite construir el intervalo $J_0 =]x_0, x_0'[\subset I$, tal que $r \in J_0$, al cual se le vuelve a aplicar el método. Así hemos construido una sucesión de intervalos encajados

$$J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \ldots$$

cuyas extremidades encuadran cada vez más a r_n. La reiteración se limita a la aproximación del cálculo de x_n y x_n'.

METODO DE NEWTON

Considere una función f que tiene una raiz única en el intervalo $I =]a, b[$. Suponga que f' y f'' conservan el signo constante en I. Entonces f es monótona en ese intervalo y su grafo tiene su concavidad dirigida hacia las $y > 0$ o hacia las $y < 0$, según que f'' sea positiva o negativa. La Figura 21-2 muestra el grafo de una función f con $f' < 0$ y $f'' > 0$ en I.

El método de Newton consiste en tomar por valor aproximado de r la abscisa x_0 del punto de intersección del eje X con la tangente al arco AB en una de sus extremidades. La tangente en A tiene por ecuación $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Corta el eje X en el punto de abscisa $x_0 = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

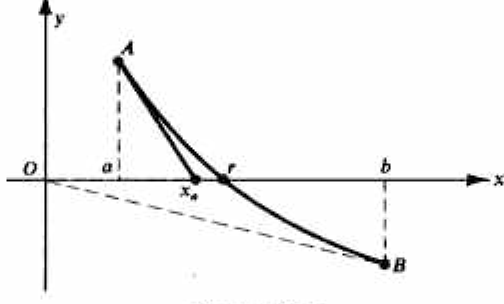


Figura 21-2

Se toma x_0 por el valor aproximado de la raiz r de f. En cada caso estudiado es conveniente asegurarse que x_0 esté entre a y r para que el método sea ventajoso. El método es ventajoso cuando se aplica a una extremidad del intervalo I si f y f'' son del mismo signo. La Figura 21-2 muestra que el método se puede aplicar al extremo A y no a B.

Error debido al método

Suponga que se puede aplicar ventajosamente el método al extremo a de I y sea $r = a + h$. Como r es raiz de f, entonces $f(a + h) = 0$. Aplicando la fórmula de Taylor se obtiene

$$0 = f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h),\ \theta \in]0, 1[$$

Entonces, $h = -\dfrac{f(a)}{f'(a)} - \dfrac{h^2}{2}\dfrac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}$; sumando a a los dos miembros y teniendo en cuenta que $x_0 = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$, se obtiene $r = x_0 - \dfrac{h^2}{2}\dfrac{f''(a + \theta h)}{f'(a)}$.

Como f' y f'' son del mismo signo I, se conoce el signo del error $r - x_0$ y, por tanto, el sentido del error cometido; x_0 es valor aproximado por defecto de r o por exceso, según que $f'f'' < 0$ o $f'f'' > 0$.

Un mayorante del error es $r - x_0 \leq \dfrac{(b - a)^2}{2|f'(a)|} \sup\limits_{x \in I} |f''(x)|$.

Aplicación simultánea de los métodos de Lagrange y Newton

Si f es una función que admite una raiz única r en el intervalo I y tiene derivadas f' y f'' de signos opuestos en I, el método de Lagrange aplicado a I da un valor x_0 que aproxima a r por defecto o por exceso, según que $f'f'' > 0$ o $f'f'' < 0$. El método de Newton da un valor x_0' que aproxima a r por defecto o por exceso, según que $f'f'' < 0$ o $f'f'' > 0$. Por consiguiente, la aplicación simultánea de los dos métodos da dos valores aproximados x_0, x_0' que encuadran a r. Tomando a $\dfrac{x + x_0'}{2}$ por valor aproximado de r se comete un error inferior a $\left|\dfrac{x_0 - x_0'}{2}\right|$. Se puede repetir el procedimiento al nuevo intervalo obtenido de extremidades x_0 y x_0' y obtener un nuevo encuadramiento más próximo a r.

Reiterando el procedimiento, se obtiene una sucesión de intervalos estrictamente encajados. Vea el Problema 21-8.

CALCULO APROXIMADO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Algunas integrales, como $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}$ o $\int_0^\pi \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x\, dx}$, no se pueden expresar por funciones elementales. Sin embargo, estas integrales se pueden calcular numéricamente por varios métodos.

Como los polinomios son las funciones más fáciles de integrar, se va a aproximar el integrando de una integral definida por medio de un polinomio adecuado, y a aceptar la integral del polinomio aproximante como la integral pedida.

Método de los rectángulos

Sea f una función integrable en un intervalo $I = [a, b]$. Vamos a calcular los valores aproximados de la integral $\sigma = \int_a^b f(x)\, dx$.

Toda suma de Riemann se puede considerar como un valor aproximado de σ. Considere únicamente las particiones del intervalo I en partes iguales; a todo número natural $n \in \mathbf{N}^*$ se asocia la partición p_n definida por:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n, \text{ con } k \in [0, n-1], x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$$

Considere la suma de Riemann:

$$\sigma_n = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n}[f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_n)]$$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$.

Si $f(x) \geq 0$ en I, σ representa el área del conjunto $A: a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$. σ_n es la suma de las áreas de los rectángulos que tienen por bases los intervalos de la partición, cuyas alturas se indican en la Figura 21-3. La suma de las áreas de los rectángulos se toma como el valor aproximado del área de A. Las mismas consideraciones se pueden aplicar a la otra suma de Riemann asociada a la partición p_n:

$$\sigma'_n = \frac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(b)]$$

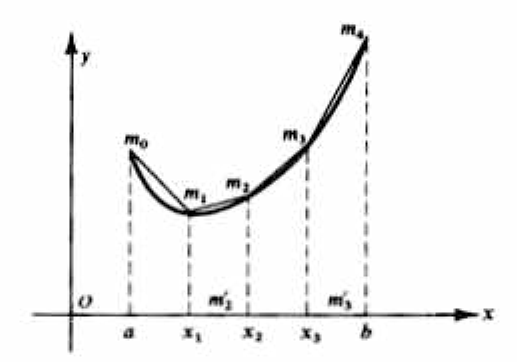


Figura 21-3

Entonces $\lim_{n\to\infty} \sigma'_n = \sigma$ es una suma de las áreas de los rectángulos que dan un valor aproximado del área de A.

Definición. Utilizar el método de los rectángulos para calcular la integral σ es tomar por valor aproximado de σ, σ_n o σ'_n.

Método de los trapecios

Tomando por valor aproximado de la suma σ la semisuma s_n de σ_n y σ'_n,

$$s_n = \frac{\sigma_n + \sigma'_n}{2} = \frac{b-a}{2}\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right]$$

el número s_n representa en la Figura 21-3 la suma de las áreas de los trapecios rectangulares, como $m'_2 m_2 m_3 m'_3$.

Definición. Utilizar el método de los trapecios para calcular la integral σ es tomar por valor aproximado de la integral σ el número s_n.

Error debido al método

Para todo intervalo $[\alpha, \beta]$ de partición p_n se remplaza la integral definida $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ por el área del trapecio $(\beta - \alpha)\dfrac{f(\beta) + f(\alpha)}{2}$. Considere la función g, de $[\alpha, \beta]$ en R, definida por

$g(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt - (x - \alpha)\dfrac{f(x) + f(\alpha)}{2}$. El error cometido en el intervalo $[\alpha, x]$ es $|g(x)|$. Suponga que f es dos veces derivable en $I = [a, b]$; entonces g es también derivable en ese intervalo y se tiene que $g'(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(\alpha) - (x - \alpha)f'(x)]$. Aplicando la fórmula de Taylor a la función f en el intervalo $[\alpha, x]$ existe un $c \in]\alpha, x[$ tal que

$$g'(x) = \frac{-(x - \alpha)^2}{4} f''(c) \tag{21-2}$$

Sea $m = \sup_{x \in I} |f''(x)|$.

Según (21-2), resulta la desigualdad

$$-m\frac{(x - \alpha)^2}{4} \leq g'(x) \leq m\frac{(x - \alpha)^2}{4}$$

integrando con respecto al intervalo $[a, x]$ y teniendo en cuenta que $\int_\alpha^x g'(t)\,dt = g(x)$, se obtiene

$$-m\frac{(x - \alpha)^3}{12} \leq g(x) \leq m\frac{(x - \alpha)^3}{12}$$

Entonces, para todo intervalo $[\alpha, \beta]$, el error que se comete $|g(\beta)|$ está mayorado por

$$\frac{(\beta - \alpha)^3}{12} m = \frac{(b - a)^3}{12n^3} m$$

El error total que se comete al remplazar σ por s_n está acotado por el producto del número anterior y n:

$$|\sigma - \sigma_n| \leq \frac{(b - a)^3}{12n^2} m$$

Si $f'' > 0$ en I, la relación (21-2) muestra que $g' \leq 0$ y $g \leq 0$. De esto resulta que s_n es un valor aproximado por exceso. Si $f'' \leq 0$ en I, σ_n es un valor aproximado por defecto de σ.

REGLA DE SIMPSON

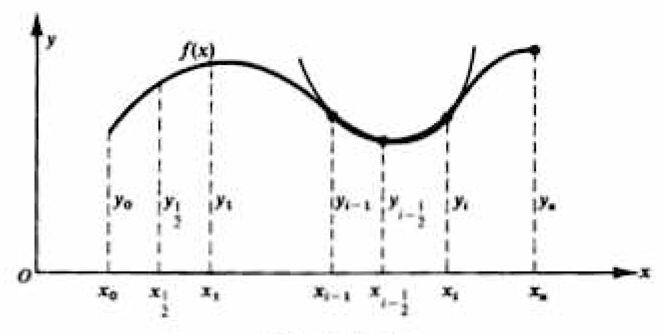


Figura 21-4

El método se basa en aproximar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ por el área, comprendida por debajo de la parábola que pasa por los puntos (x_{i-1}, y_{i-1}), $\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{i-\frac{1}{2}}\right)$ y (x_i, y_i), con $x_{i-\frac{1}{2}} =$

$= \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$; $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, que es el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $y_{i-\frac{1}{2}}$ es el valor correspondiente de f. Si la parábola tiene por ecuación $F(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces

$$\int_\alpha^\beta (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[\frac{1}{3}Ax^2 + \frac{1}{2}Bx + Cx\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{3}A(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{1}{2}B(\beta^2 - \alpha^2) + C(\beta - \alpha) =$$

$$= \frac{\beta - \alpha}{6}[2A(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + 3B(\alpha + \beta) + 6C] = \frac{\beta - \alpha}{6}\left[A\alpha^2 + B\alpha + C + 4A\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 4B\frac{\alpha + \beta}{2} + 4C + A\beta^2 + B\beta + C\right] = \frac{\beta - \alpha}{6}\left[F(\alpha) + 4F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + F(\beta)\right]$$

Si se elige a $\alpha = x_{i-1}$, $\beta = x_i$, se halla que el área comprendida por la parábola, el eje X y que pasa por los tres puntos está dada por

$$\frac{\Delta x}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + f(x_i)\right] = \frac{b - a}{6n}\left[y_{i-1} + 4y_{i-\frac{1}{2}} + y_i\right]$$

puesto que $f(x)$ y $F(x)$ coinciden si $x = x_{i-1}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_i$. Aproximando por la suma de las n áreas de este tipo, se obtiene la regla de Simpson:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b - a}{6n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{i-1} + 4y_{i-\frac{1}{2}} + y_i\right) = \frac{b - a}{6n}(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots +$$

$$+ y_{n-1}) + 4\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{n-\frac{1}{2}}\right)$$

Error debido al método

Sea $E = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b - a}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{i-1} + 4y_{i-\frac{1}{2}} + y_i\right)$ el error asociado a la regla de Simpson y suponga que f tiene derivadas hasta de orden cuatro en $[a, b]$. Entonces

$$E = -\frac{(b - a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\xi),\ \xi \in [a, b] \tag{21-3}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 21-1 Separe las raíces reales de la ecuación $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$.

Solución. Veamos las variaciones de f. En efecto, $f'(x) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$. Esto muestra que las raíces de f' son 0,1 y -1. La Tabla 21-1 es de variaciones de f.

TABLA 21-1

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Entonces la ecuación tiene una, y solo una, raíz en los intervalos $]-\infty, -1[$, $]0,1[$, $]1, +\infty[$. Como $f(-2) = -55 < 0$ y $f(2) = 57 > 0$, la ecuación tiene una, y solo una, raíz real en los intervalos siguientes: $]-2, -1[$, $]0,1[$, $]1,2[$.

Problema 21-2 Separe las raíces de la ecuación $f(x) = (x + 1) \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{\pi}{2} = 0$.

Solución. La derivada de f es $f'(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x$ y $f''(x) = \dfrac{2(1-x)}{(1+x^2)^2}$. La tabla de variaciones de la función está expuesta en la Tabla 21-2.

TABLA 21-2

x	$-\infty$		-1		α		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$-\frac{\pi}{4}$	↗	0	↗	1	↗		↘	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{\pi}{2}$	↘		↗	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$+\infty$

Como $f'(-1) = -\dfrac{\pi}{4} < 0$ y $f'(0) = 1 > 0$, muestran que f' tiene una raíz en $]-1,0[$. Además, $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, $f(0) = -\dfrac{\pi}{2}$, $f(1) = 0$. Entonces 1 es la única raíz de la ecuación en el intervalo $]-\infty, -1[$.

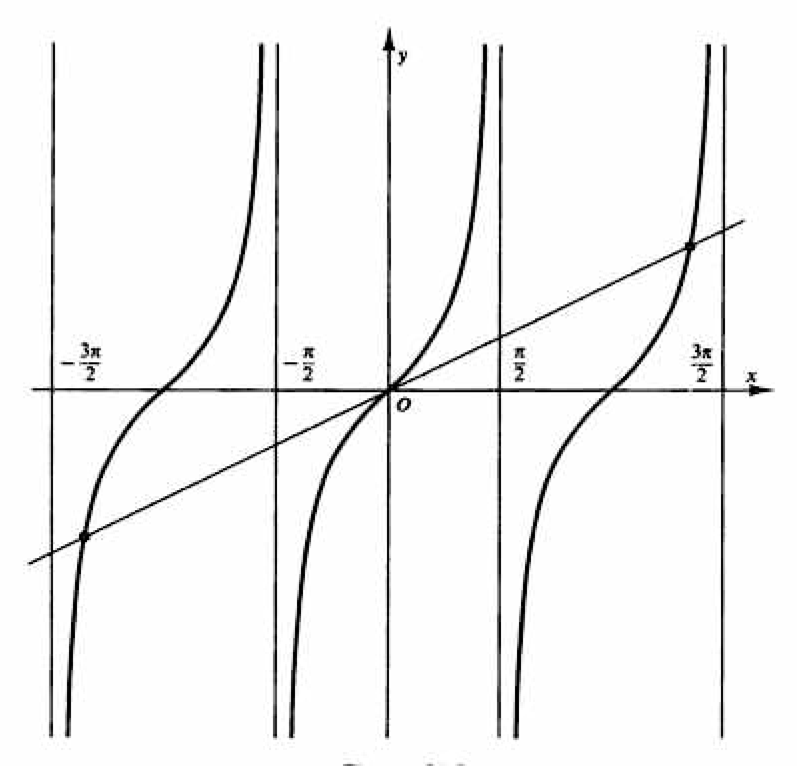


Figura 21-5

Problema 21-3 Separe las raíces de $x \cos x = 2 \operatorname{sen} x$.

Solución. Observe que toda raíz de $\cos x$ no es raíz de la ecuación; la ecuación es equivalente a $\operatorname{tg} x = \frac{x}{2}$.

La Figura 21-5 muestra los grafos de $y = \operatorname{tg} x$ y $y = \frac{x}{2}$. El dibujo muestra que la ecuación propuesta tiene una, y solo una, raíz en cada uno de los intervalos

$$I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \ k \in \mathbf{Z}$$

Problema 21-4 Calcule la raíz r de la ecuación $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$ que está en el intervalo $]0, 1[$.

Solución. f es creciente en I. Además,

$f(1/2) = 3/32 - 5/8 + 1 = 15/32 > 0$, entonces $r \in I_1 =]1/2, 1[$
$f(3/4) = 3^6/4^5 - (5 \cdot 3^3)/4^3 + 1 = -407/4^5 < 0$, entonces $r \in I_2 =]1/2, 3/4[$
$f(5/8) = \frac{3 \cdot 5^5}{8^5} - \frac{5^4}{8^3} + 1 = 2143/8^5 > 0$, entonces $r \in I_3 =]5/8, 3/4[$

Tomando la semisuma de los extremos de I_3 se obtiene 11/16, valor aproximado de r. En el sistema binario, la representación de ese valor aproximado es 0,1011. En ese sistema, $0{,}1010 < r < 0{,}1100$.

Problema 21-5 Determine la raíz de $\log x + x = 0$ utilizando una tabla de logaritmos con cinco decimales.

Solución. En la tabla con cinco decimales, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$. Observe que la función es creciente en $\mathbf{R}^+$ y, por tanto, tiene una raíz única en el intervalo $]0, 1[$, puesto que $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Observe la Tabla 21-3.

TABLA 21-3

x	0,5	0,25	0,4	0,399	0,39901	0,39902
$\log x$	$\bar{1}$,69897	$\bar{1}$,39794	$\bar{1}$,60206	$\bar{1}$,60097	$\bar{1}$,600981	$\bar{1}$,600992
$f(x)$	0,19897	$\bar{1}$,64794	0,00206	$\bar{1}$,99997	$\bar{1}$,999991	0,000012

Ensayando con 0,5 y después con 0,25, en valor absoluto, el primer resultado es inferior al segundo. Por esta razón tomamos a 0,4 que está más próximo de 0,5 que de 0,25.

$f(0{,}4)$ es muy pequeño, y, por tanto, ensayamos con 0,399 próximo a 0,4.

$f(0{,}399)$ es negativo y casi nulo $(3 \cdot 10^{-5})$.

Ensayemos con 0,39901 y 0,39902 utilizando la interpolación tabular. El método queda entonces limitado a esos números. Tomando por valor aproximado la semisuma se obtiene $r = 0{,}399015$, con un error de $5 \cdot 10^{-6}$.

Problema 21-6 Calcule la raíz de $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$ en el intervalo $]5/8, 3/4[$.

Solución. La relación $x_0 = a - f(a)\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$ da

$$x_0 = \frac{\frac{5}{8}\left(\frac{407}{4^5}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{2143}{8^5}\right)}{\frac{407}{4^5} + \frac{2143}{8^5}} = \frac{80 \times 407 + 3 \times 2143}{4(407 \times 2^5 + 2143)} = \frac{38989}{60668}$$

que es el valor exacto de x_0. Para calcular el error $|x_0 - r|$ observe que

$$b - a = 1/8 \text{ y } f(b) - f(a) = \frac{407 \times 2^5 + 2143}{8^5} = \frac{15167}{8^5}, \text{ de donde } \frac{(b-a)^3}{8|f(b) - f(a)|} = \frac{8}{15167}$$

Por otra parte, $f''(x) = 30x(2x^2 - 1)$. La función f'' es creciente en I, puesto que

$$f''(5/8) = \frac{-35 \times 15}{128} \text{ y } f''(3/4) = 45/16; \text{ entonces } \sup_{x \in I} |f''(x)| = \frac{35 \times 15}{128}$$

de donde
$$|x_0 - r| \leq \frac{8}{15167} \cdot \frac{35 \times 15}{8 \times 16} < 2{,}2 \cdot 10^{-3}$$

Como f'' no conserva el signo en I, no se conoce el sentido del error. Además,

$$0{,}6426 < x_0 < 0{,}6427 \Rightarrow 0{,}6404 < r < 0{,}6449$$

Problema 21-7 Resuelva la ecuación $f(x) = x^3 + 8x - 2 = 0$.

Solución. La derivada es $f'(x) = 3x^2 + 8$, que es positiva en **R**; por consiguiente, es estrictamente creciente en **R**. Admite una raíz, y una sola, que pertenece al intervalo $]0, 1[$ porque $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$.

También $f(1/4) = 1/4^3 > 0$ y $f(1/8) = 1/8^3 - 1 < 0$. Por consiguiente, la raíz de f pertenece al intervalo $I =]1/8, 1/4[$.

La derivada f'' es positiva en I y $|f''(x)| \leq 3/2$. Entonces, según la regla, se puede aplicar el método de Newton al punto 1/4. Se obtiene el valor de x_0 (por exceso, porque $f'f'' > 0$),

$$x_0 = \frac{1}{4} - \frac{f\left(\frac{1}{4}\right)}{f'\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{65}{262}$$

El error que se comete es

$$|x_0 - r| \leq \frac{1}{8^2 \times 2 \times \frac{131}{16}} \times \frac{3}{2} \leq 1{,}5 \cdot 10^{-3}$$

Entonces el valor aproximado por exceso de x_0 es $x_0 = 0{,}2481$, con un error de 10^{-4}. Sumando los errores por exceso se obtiene $1{,}6 \cdot 10^{-3}$; entonces podemos afirmar que $0{,}2465 < r < 0{,}2481$.

Problema 21-8 Sea $f(x) = x^3 + 8x - 2 = 0$. Aplique el método de Newton y Lagrange para calcular una de sus raíces en el intervalo $]1/8, 1/4[$.

Solución. Aplicando el método de Lagrange se halla que un valor x'_0 que aproxima a r por defecto es

$$x'_0 = \frac{\frac{1}{8} f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{515}{2076}$$

Entonces tenemos, considerando el resultado obtenido por el método de Newton, que

$$\frac{515}{2076} < r < \frac{65}{262}$$

Calculando los dos valores, la primera la aproxima hasta 10^{-6} por defecto y la segunda hasta 10^{-6} por exceso; entonces

$$0{,}248073 < r < 0{,}248092$$

Tomando la semisuma se halla que el valor aproximado de r es 0,248083, con un error inferior a 10^{-5}

Problema 21-9 Emplee la regla de Simpson para calcular $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Solución. La derivada cuarta de la integral es $24/x^5$ y, por tanto, el error E es tal que

$$E < 0,\ |E| \leq \frac{24}{2880n^4} = \frac{1}{120n^4} \text{ por} \tag{21-3}$$

Eligiendo $n = 5$ se obtiene

$$|E| \leq 14 \times 10^{-6} \tag{21-1}$$

En este caso, la regla de Simpson toma la forma

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{30}[(y_0 + y_5) + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 4(y_{1/2} + y_{3/2} + y_{5/2} + y_{7/2} + y_{9/2})]$$

Calculando todos los números con cinco decimales se obtiene:

$x_0 = 1$	$y_0 = 1{,}00000$	$x_{1/2} = 1{,}1$	$y_{1/2} = 0{,}90909$
$x_5 = 2{,}0$	$+y_5 = 0{,}50000$	$x_{3/2} = 1{,}3$	$y_{3/2} = 0{,}76923$
suma	$= 1{,}50000$	$x_{5/2} = 1{,}5$	$y_{5/2} = 0{,}66667$
$x_1 = 1{,}2$	$y_1 = 0{,}83333$	$x_{7/2} = 1{,}7$	$y_{7/2} = 0{,}58824$
$x_2 = 1{,}4$	$y_2 = 0{,}71429$	$x_{9/2} = 1{,}9$	$y_{9/2} = 0{,}52632$
$x_3 = 1{,}6$	$y_3 = 0{,}62500$	suma	$= 3{,}45955$
$x_4 = 1{,}8$	$y_4 = 0{,}55556$	4 × suma	$= 13{,}83820$
suma	$= 2{,}72818$		
2 × suma	$= 5{,}45636$		

Entonces

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{30}(1{,}5 + 5{,}45636 + 13{,}83820) = 0{,}693152$$

Empleando (21-1) y el hecho del error redondeado es menor que 5×10^{-6}, se halla que

$$0{,}693152 - 0{,}000019 < \int_1^2 \frac{dx}{x} < 0{,}693152 + 0{,}000005$$

es decir,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}69315 \tag{21-2}$$

exacta hasta 2×10^{-5}. Si (21-2) se compara con el valor conocido, $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2 = 0{,}69314718\ldots$ es exacta hasta 3×10^{-6}.

Problema 21-10 Halle una aproximación para el valor de la integral elíptica $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx$, empleando la regla del trapezoide con $n = 10$.

Solución. Los cálculos y resultados se resumen en la Tabla 22-4.

Como la suma de la última columna es 22,24682, entonces el valor de la integral es

$$\frac{1}{2}(y_0 + 2y_1 + \ldots + y_n)\Delta x = \frac{11{,}12341}{10} = 1{,}112, \text{ con tres decimales}$$

TABLA 21-4

0	0	1.	1.	1.
0,1	0,001	1,001	1,00050	2,00100
0,2	0,008	1,008	1,00399	2,00798
0,3	0,027	1,027	1,01341	2,02682
0,4	0,064	1,064	1,03150	2,06300
0,5	0,125	1,125	1,06066	2,12132
0,6	0,216	1,216	1,10272	2,20544
0,7	0,343	1,343	1,15888	2,31776
0,8	0,512	1,512	1,22963	2,45926
0,9	0,729	1,729	1,31491	2,62982
1.	1.	2,000	1,41421	1,41442
				22,24682

Problema 21-11 Halle el grado de aproximación que se obtuvo en el problema anterior.

Solución. Sea $f(x) = (1 + x^3)^{1/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-1/2}(3x^2)$, $f''(x) = \frac{3}{4}(4x + x^4)(1 + x^3)^{-3/2}$ y, por consiguiente, si $0 < \xi < 1$,

$$0 < f''(\xi) = \frac{3}{4}(4\xi + \xi^4)(1 + \xi^3)^{-3/2} < \frac{15}{4}$$

Por tanto, para el intervalo $[a, b] = [0,1]$ y tomando 10 subdivisiones iguales, $\Delta x = 0{,}1$, y

$$0 < \frac{b-a}{12} < f''(\xi)\Delta x^2 = \frac{f''(\xi)}{1200} < \frac{15}{4800} < \frac{1}{320}$$

Si $T(n)$ representa la suma para n subintervalos iguales e $I = \int_a^b f(x)\,dx$, entonces

$$-0{,}0032 < -\frac{1}{320} < I - T(10) < 0$$

De los cálculos del problema anterior obtenemos $1{,}1123 < T(10) < 1{,}1124$ y, por consiguiente,

$$1{,}1091 < T(10) - 0{,}0032 < I < T(10) < 1{,}1124$$

Entonces, para dos decimales, $I = 1{,}11$.

Problema 21-12 Halle una aproximación para el valor de la integral elíptica $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx$, empleando la regla de Simpson.

Solución. Empleando los valores de la última columna de la Tabla 21-4 tenemos que, para la suma,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + 4(y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2})]$$

$$\frac{1}{30}(1{,}0 + 4{,}004 + 2{,}00798 + 4{,}05364 + 2{,}063 + 4{,}24264 + 2{,}20544 + 4{,}63552 + 2{,}45926 + 5{,}25964 +$$

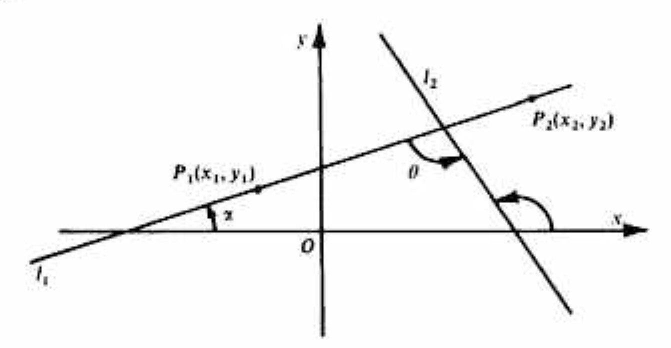
$$+ 1{,}41442) = \frac{33{,}34354}{30} = 1{,}11145, \text{ aproximada con cinco decimales.}$$

APENDICE

Formulario. Geometría analítica

Punto, inclinación, ángulo

Dados un sistema de coordenadas cartesianas en el plano y dos puntos $P_1(x_1, y_2)$ y $P_2(x_2, y_2)$, se tienen las siguientes fórmulas:



Distancia de P_1 a P_2: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Las coordenadas del punto P que divide el segmento P_1P_2 en la razón r/s:

$$\left(\frac{rx_2 + sx_1}{r + s}, \frac{ry_2 + sy_1}{r + s}\right)$$

Coordenadas del punto medio de P_1P_2:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Pendiente m de P_1P_2: $m = \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Angulo θ que forman las rectas l_1 y l_2 de pendientes m_1 y m_2, respectivamente:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Si las rectas son paralelas: $m_1 = m_2$

Si las rectas son perpendiculares: $m_1 m_2 = -1$

Los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Areas poligonales

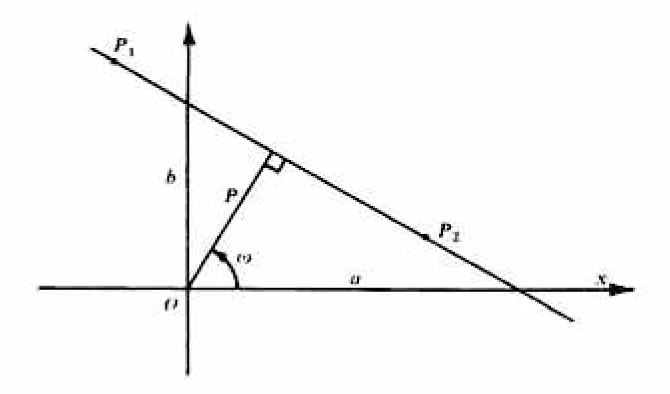
El área del triángulo con vértices en los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ está dada por:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1)$$

El área de un polígono con vértices en los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ está dada por:

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_{n-1}y_n + x_ny_1 - y_1x_2 - \ldots - y_{n-1}x_n - y_nx_1)$$

Recta



La ecuación de una recta paralela al eje Y es: $x = a$.
La ecuación de una recta paralela al eje X es: $y = b$.
La ecuación de la recta de pendiente m está dada por: $y = mx + b$.
La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados en los puntos $(0, b)$ y $(a, 0)$ está dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$, y es de pendiente m, está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

La ecuación de la recta que pasa por dos puntos es:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación normal de la recta está dada por: $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega = p$.
La ecuación general de la recta está dada por: $Ax + By + C = 0$.
Su pendiente es $m = A/B$ y las intersecciones con los ejes $a = -C/A$, $b = -C/B$.

Nota. Para reducir $Ax + By + C = 0$ a la forma normal divida la ecuación por $\sqrt{A^2 + B^2}$, eligiendo el signo del radical opuesto al signo de C cuando C es diferente de 0 y lo mismo con el signo de B cuando $C = 0$.

El ángulo θ que forman las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ está dado en función de los coeficientes por la expresión:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

Las dos rectas son paralelas si $A_1B_2 = A_2B_1$.

Las dos rectas son perpendiculares si $A_1A_2 = -B_1B_2$.

Las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ y $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ son concurrentes si, y solamente si,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Círculo

La ecuación del círculo con centro en el origen y radio r es: $x^2 + y^2 = r^2$.

La ecuación del círculo con centro en (h, k) y radio r es: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

La ecuación general de un círculo es: $\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0, \; A \neq 0 \\ x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \end{cases}$

Las coordenadas del centro son: $(-d, -e)$ y su radio $r = \sqrt{d^2 + e^2 - f}$.

La ecuación de un círculo que pasa por tres puntos está dada por:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Secciones cónicas

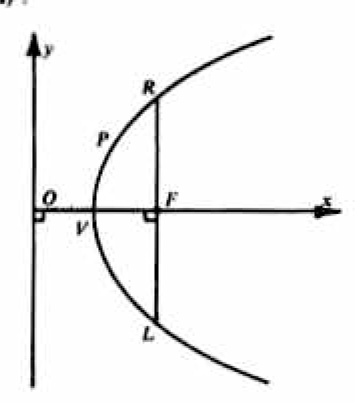
Una sección cónica es el lugar geométrico que describe un punto P, que se mueve en el plano con respecto a un punto fijo F (foco) y a una recta fija d (llamada directriz), F no está sobre d, y tal que la razón de la distancia de P a F sobre la distancia de P a d es una constante e (llamada excentricidad).

Si $e = 1$, el lugar geométrico es una parábola; si $e < 1$, una elipse, y si $e > 1$, una hipérbola.

Si el foco está en $(0, 0)$, la directriz es $x = -a$ y $x^2 + y^2 = e^2(x + a)^2$.

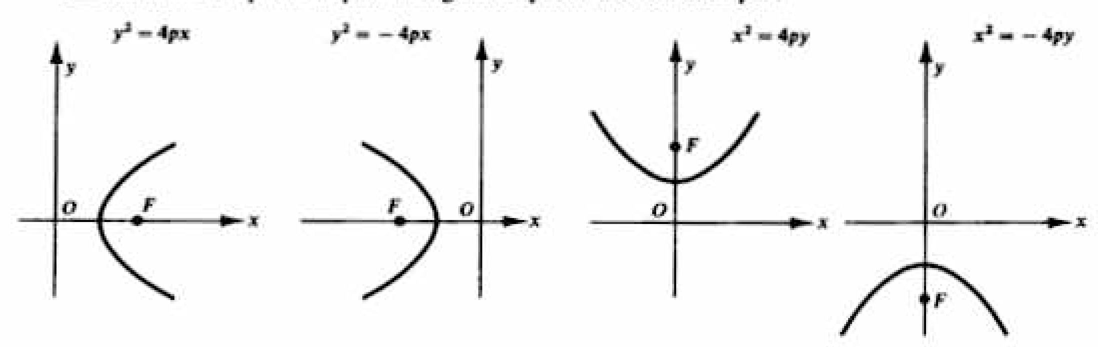
Parábola ($e = 1$)

Sea p la distancia que hay del vértice al foco, e = excentricidad.



V: vértice
F: foco
d: directriz
LR: «latus rectum»
recta VF: eje
p: distancia del vértice a la directriz

La ecuación de la parábola para las siguientes posiciones está dada por:



La ecuación de la parábola cuando:

el vèrtice es (h, k) y el foco $(h + p, k)$ es $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
el vèrtice es (h, k) y el foco $(h - p, k)$ es $(y - k)^2 = -4p(x - h)$
el vèrtice es (h, k) y el foco $(h, k + p)$ es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
el vèrtice es (h, k) y el foco $(h, k - p)$ es $(x - h)^2 = -4p(y - k)$

Forma general, eje paralelo al eje X: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Forma general, eje paralelo al eje Y: $\begin{cases} Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$

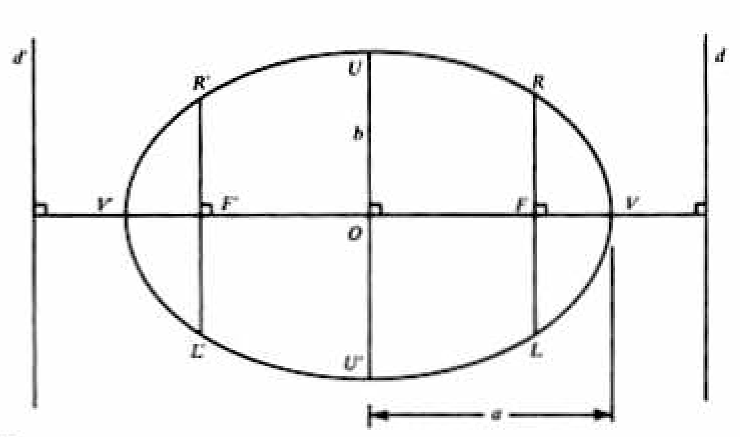
Forma general, cuando el eje no es paralelo a los ejes coordenados:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + f = 0, \; B^2 - 4AC = 0$$

Elipse ($e < 1$)

Sea $2a$ = eje mayor, $2b$ = eje menor, e = excentricidad.

O: centro
V, V': vèrtices
VV': eje mayor = $2a$
UU': eje menor = $2b$
F, F': focos
d, d': directrices
$LR, L'R'$: «latus rectum»



Excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Distancia del centro al foco: $\sqrt{a^2 - b^2}$.
Distancia del centro a la directriz: a/e.
Suma de las distancias de cualquier punto a los focos: $2a$.

La ecuación de la elipse, si el eje mayor coincide con el eje X, es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

La ecuación de la elipse, si el eje mayor coincide con el eje Y, es $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$.

La ecuación de la elipse, con centro en (h, k) y eje mayor paralelo al eje X, es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

La ecuación de la elipse, con centro en (h, k) y eje mayor paralelo al eje Y, es

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

La forma general de la ecuación de una elipse cuando los ejes son paralelos a los ejes coordenados es:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La forma general de la ecuación de una elipse cuando los ejes no son paralelos a los ejes coordenados es

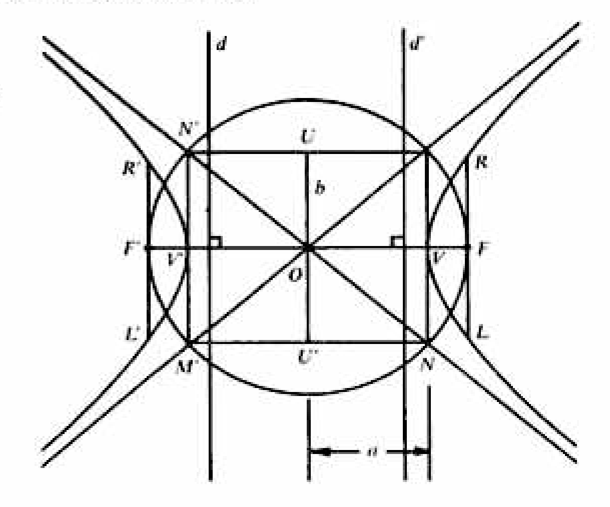
$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + fy + e = 0$$

Para un círculo: $a = b$.

Hipébola (e > 1)

$2a$ = longitud del eje transversal, $2b$ = longitud del eje conjugado, e = excentricidad.

O: centro
V, V': vértices
VV': eje transversal = $2a$
UU': eje conjugado = $2b$
F, F': focos
d, d': directrices
$LR, L'R'$: «latus rectum»
MM' y NN': asintotas



Excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

Distancia del centro al foco: $\sqrt{a^2 + b^2}$.
Distancia del centro a una de las directrices: a/c.
Diferencia de las distancias de un punto sobre la hipérbola a los focos: $2a$.
Ecuación de la hipérbola con centro en el origen: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Pendientes de las asintotas: $\pm b/a$.
La ecuación de la hipérbola, si el eje mayor coincide con el eje Y, es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$.
Pendientes de las asintotas: $\pm a/b$.
La ecuación de la hipérbola, con centro en (h, k) y eje transversal paralelo al eje X, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Pendientes de las asintotas: $\pm b/a$.
Ecuación de la hipérbola, con centro en (h, k) y eje transversal paralelo al eje Y, es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Pendientes de las asintotas: $\pm a/b$.
La ecuación de la hipérbola, con centro en el origen y por asintotas los ejes coordenados, es $yx = c$.
Ecuación de la hipérbola, con centro en (h, k) y asintotas paralelas a los ejes coordenados, es

$$(x-h)(y-k) = c$$

La forma general de la ecuación de una hipérbola cuando los ejes son paralelos a los ejes coordenados es

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + EY + F = 0,\ AC < 0$$

La forma general de la ecuación de una hipérbola cuando sus ejes son inclinados es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,\ B^2 - 4AC > 0$$

Para una hipérbola rectangular: $a = b$, $e = \sqrt{2}$. Las asintotas son perpendiculares.

Ecuación general de segundo grado

La naturaleza del grafo de la ecuación general de segundo grado en las variables x y y:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

está descrita en la Tabla A-1 en términos de los valores de:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \qquad J = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix},\ I = a + b \qquad K = \begin{vmatrix} a & g \\ g & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix}$$

TABLA A-1

Caso		J	Δ/J	K	Cónica
1	$\neq 0$	>0	<0		Elipse real.
2	$\neq 0$	>0	>0		Elipse imaginaria.
3	$\neq 0$	<0			Hipérbola.
4	$\neq 0$	0			Parábola.
5	0	<0			Dos rectas que se cortan.
6	0	>0			Dos rectas complejas conjugadas que se cortan.
7	0	0		<0	Rectas paralelas, diferentes.
8	0	0		>0	Dos rectas complejas conjugadas paralelas.
9	0	0		0	Rectas concurrentes.

En los casos 1, 2 y 3 el centro (x_0, y_0) está dado por las soluciones de las ecuaciones

$$ax = hy + g = 0,\ hx + by + f = 0$$

Las ecuaciones de los ejes son $y - y_0 = m(x - x_0)$, $y - y_0 = -\dfrac{1}{m}(x - x_0)$, siendo m la raíz positiva de $hm^2 + (a - b)m - h = 0$.

Transformación de coordenadas

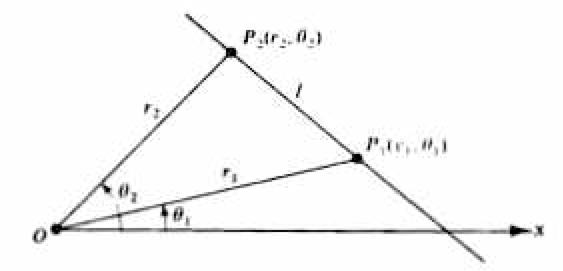
Para obtener la ecuación de una curva dada con relación a un sistema original de coordenadas (X, Y), en un nuevo sistema (X', Y'), se emplean las siguientes relaciones:

Traslación $\begin{Bmatrix} x = x' + h \\ y = y' + k \end{Bmatrix}$. Los ejes nuevos son paralelos a los originales y tienen centro en (h, k).

Rotación $\begin{Bmatrix} x = x' \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \\ y = y' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{Bmatrix}$. Los origenes coinciden y los nuevos ejes forman un ángulo θ con los originales.

Para eliminar el término xy de la ecuación $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ gire los ejes coordenados un ángulo $\theta = \operatorname{arc\,tg} m$, siendo m la raíz positiva de $hm^2 + (a - b)m - h = 0$.

Coordenadas polares



La distancia entre los puntos P_1 y P_2 está dada por $r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$.
Tres puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales si, y solamente si,

$$r_2r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) + r_3r_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_3) + r_1r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Area de figuras poligonales

El área del triángulo $P_1P_2P_3$ está dada por:

$$\frac{1}{2}(r_1r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) + r_2r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) + r_3r_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_3))$$

Recta

La ecuación normal de la recta es $r \cos(\theta - \omega) = p$.

La ecuación de la recta que pasa por dos puntos es

$$r(r_1 \operatorname{sen}(\theta - \theta_1) + r_2 \operatorname{sen}(\theta - \theta_2)) = r_1r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

Círculo

La ecuación del círculo con centro en el polo y radio a es $r = a$.

La ecuación del círculo con centro en $(a, 0)$ y que pasa por el polo es $r = 2a \cos \theta$.

La ecuación del círculo con centro en $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ y que pasa por el polo es $r = 2a \operatorname{sen} \theta$.

La ecuación del círculo con centro en (h, α) y radio a es $r^2 - 2hr \cos(\theta - \alpha) + h^2 - a^2 = 0$.

Secciones cónicas

Sea $2p$ = la distancia de la directriz al foco, e = excentricidad.

La ecuación de la cónica con la directriz a la izquierda del polo y foco en el polo es

$$r = \frac{2ep}{1 - e \cos \theta}$$

La ecuación de la cónica con foco en el polo y directriz a la derecha del polo es

$$r = \frac{2ep}{1 + e \cos \theta}$$

La ecuación de la cónica con foco en el polo y directriz por debajo del polo es

$$r = \frac{2ep}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

La ecuación de la cónica con directriz por encima del polo y foco en el polo es

$$r = \frac{2ep}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

La ecuación de la parábola con vértice en el polo y directriz a la izquierda del polo es

$$r = \frac{4p \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

La ecuación de la elipse con centro en el polo y semiejes a y b es

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

La ecuación de la hipérbola con centro en el polo y semiejes a y b es

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta}$$

Relaciones que existen entre las coordenadas rectangulares y polares

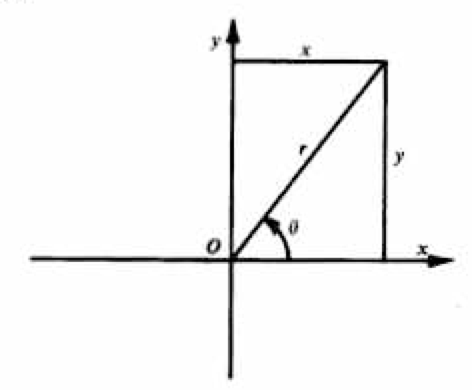
La figura de la derecha muestra las relaciones que existen entre los dos sistemas de coordenadas y que permiten pasar de las coordenadas rectangulares a las polares y viceversa.

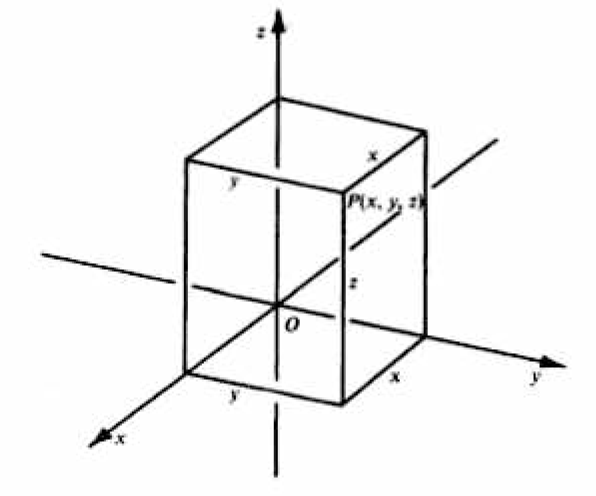
$$x = r\cos\theta,\ y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$





Coordenadas rectangulares en el espacio

En R^3 se dibujan tres rectas mutuamente perperpendiculares que se corten en un solo punto. Las tres rectas se llaman el eje X, Y y Z, respectivamente, y el punto de intersección el origen. Cada punto de R^3 tiene tres coordenadas; la primera indica su posición con respecto al eje X, la segunda con respecto al eje Y y la tercera con respecto al eje Z.

La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ está dada por

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Las coordenadas del punto $P(x\ y, z)$, que divide el segmento P_1P_2 en la razón r/s, están dadas por

$$\left(\frac{rx_2 + sx_1}{r + s},\ \frac{ry_2 + sy_1}{r + s},\ \frac{yz_2 + sz_1}{r + s}\right)$$

Las coordenadas del punto medio de P_1P_2 son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2},\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 son coplanares si, y solamente si,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El área del triángulo $P_1P_2P_3$ está dada por:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

El volumen del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ está dado por

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Parámetros directores y cosenos directores

Si α, β y γ son los ángulos que determina la recta que pasa por P_1 y P_2, con los ejes coordenados, a estos ángulos se les llama ángulos directores. Los cosenos directores de dichos ángulos están definidos por

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d},\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d},\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d};\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Si a, b y c son los parámetros directores de P_1P_2, entonces se tiene que

$$a : b : c = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1) = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma;$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ \cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Si los ángulos directores de dos rectas son $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, el ángulo θ que forman está dado por $\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$.

Si las rectas son paralelas, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Si las rectas son perpendiculares, $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$.

Si (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) son los parámetros directores de dos rectas, entonces el ángulo que forman está dado por

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{(b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (c_1a_2 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Si las rectas son paralelas, $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$.

Si las rectas son perpendiculares, $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Recta

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y de parámetros directores a, b y c es

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

La ecuación de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 es

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

La ecuación paramétrica de una recta es $x = x_1 + ta$, $y = y_1 + tb$, $z = z_1 + tc$.

La forma general de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 está dada por

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sus números directores son $(B_1C_1 - C_1B_2,\ C_1A_2 - A_1C_2,\ A_1B_2 - B_1A_2)$.

La distancia que hay del punto P_0 a la recta que pasa por P_1 y de dirección (a, b, c) está dada por

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ a & b \end{vmatrix}}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La distancia que hay entre la recta que pasa por P_1 en la dirección (a_1, b_1, c_1) y la recta que pasa por P_2 en la dirección (a_2, b_2, c_2) está dada por

$$\pm \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \Bigg/ \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

La recta que pasa por P_1 en la dirección (a_1, b_1, c_1) y la recta que pasa por P_2 en la dirección (a_2, b_2, c_2) se cortan si, y solamente si,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Planos

La forma general de la ecuación de un plano es $Ax + By + Cz + D = 0$.

La dirección normal al plano es (A, B, C).

La ecuación del plano perpendicular al plano YZ es $By + Cz + D = 0$.

La ecuación del plano perpendicular al plano XZ es $Ax + By + D = 0$.

La ecuación del plano perpendicular al plano ZY es $Ax + By + D = 0$.

La ecuación del plano perpendicular al eje X es $Ax + D = 0$.

La ecuación del plano perpendicular al eje Y es $By + D = 0$.

La ecuación del plano perpendicular al eje Z es $Cz + D = 0$.

La ecuación del plano que corta los ejes coordenados a las distancias a, b y c tiene por ecuación a la expresión

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

La ecuación del plano que pasa por P_1 y es perpendicular a la dirección (a, b, c) es

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

La ecuación del plano que pasa por el punto P_1 y es paralelo a las direcciones (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) es

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación del plano que pasa por los puntos P_1 y P_2 y es paralelo a la dirección (a, b, c) es

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación del plano que pasa por tres puntos P_1, P_2 y P_3 es

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

La forma normal de la ecuación del plano (p = la distancia del origen al plano; α, β, γ, los ángulos directores de la normal al plano desde el origen) es

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

Para reducir $Ax + By + Cz + d = 0$ a la forma normal divida por $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; el signo del radical se elige opuesto al de D cuando $D \neq 0$; el signo de C cuando $D = 0$ y $C \neq 0$; el signo de B cuando $C = D = 0$.

$$\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

El ángulo θ que forman los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ está dado por

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Los dos planos son paralelos si, y solamente si, $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$.
Los dos planos son perpendiculares si, y solamente si, $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Esfera

La ecuación de la esfera con centro en el origen y radio r es $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

La ecuación de la esfera con centro en (h, k, l) y radio r es $(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$.

La ecuación general de la esfera es $\begin{cases} Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Bx + Ey + Fz + H = 0, \ A \neq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2dx + 2ey + 2fz + m = 0 \end{cases}$

Su centro es $(-d, -e, -f)$.

La ecuación de la esfera que tiene a los puntos P_1 y P_2 como diámetro es

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

La ecuación de la esfera que pasa por cuatro puntos está dada por:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Superficies cuadráticas

1. Elipse real:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
2. Elipse imaginaria:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = -1$.
3. Hiperboloide de una sección:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$.
4. Hiperboloide de dos secciones:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$.
5. Cono real:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$.
6. Cono imaginario:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$.
7. Paraboloide elíptico:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + 2z = 0$.
8. Cilindro elíptico real:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
9. Cilindro elíptico imaginario:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$.
10. Cilindro hiperbólico:	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$.
11. Paraboloide hiperbólico:	$x^2/a^2 - y^2/b^2 + 2z = 0$.
12. Planos reales que se cortan:	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$.
13. Planos imaginarios que se cortan:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$.
14. Cilindro parabólico:	$x^2 + 2rz = 0$.
15. Planos paralelos reales:	$x^2 = a^2$.
16. Planos paralelos imaginarios:	$x^2 = -a^2$.
17. Planos que coinciden:	$x^2 = 0$.

Ecuación general de segundo grado

La naturaleza del grafo de la ecuación general de segundo grado en tres variables, x, y, z,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2px + 2qy + 2rz + d = 0$$

está determinada en la Tabla A-2 en términos de $p_3, p_4, \Delta, k_1, k_2, k_3$, donde:

$$e = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \qquad E = \begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & e & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix}, \quad p_3 = e,\ p_4 = E,\ \Delta = \text{determinante de } E$$

$$k_1, k_2, k_3 \text{ las raices de } \begin{vmatrix} a - x & g & g \\ h & b - x & f \\ g & f & e - x \end{vmatrix} = 0$$

TABLA A-2

Caso	p_3	p_4	Signo de Δ	k	Superficies cuadráticas
1	3	4	−	si	Elipsoide real.
2	3	4	+	si	Elipsoide imaginario.
3	3	4	+	no	Hipérbola de una sección.
4	3	4	−	no	Hiperboloide de dos secciones.
5	3	3		no	Cono real.
6	3	3			Cono imaginario.
7	2	4	−	si	Paraboloide eliptico.
8	2	4	+	no	Paraboloide hiperbólico.
9	2	4		si	Cilindro eliptico real.
10	2	3		si	Cilindro eliptico imaginario.
11	2	3		no	Cilindro hiperbólico.
12	2	2		no	Planos reales que se cortan.
13	2	2		si	Planos imaginarios que se cortan.
14	1	3			Cilindro parabólico.
15	1	2			Planos paralelos reales.
16	1	2			Planos paralelos imaginarios.
17	1	1			Planos coincidentes.

Transformación de coordenadas

Para cambiar la ecuación de una superficie dada en un sistema de coordenadas (x, y, z) a un nuevo sistema (x', y', z'), cuando se trasladan los ejes paralelamente a los originales, se utiliza la relación que se da a continuación:

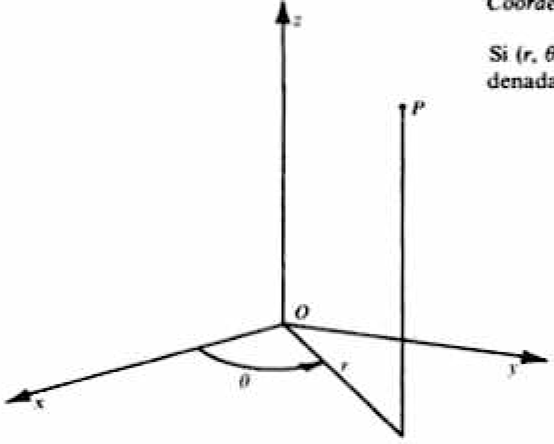
Traslación

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \\ z = z' + l \end{cases}$$

Rotación con respecto al origen

Si se gira un sistema de coordenadas con respecto al origen y si los números directores de los nuevos ejes son $(\lambda_1, \mu_1, \gamma_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \gamma_2)$, $(\lambda_3, \mu_3, \gamma_3)$, respectivamente, con respecto al sistema original, entonçes

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' \\ y &= \mu_1 x' + \mu_2 y' + \mu_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x' &= \lambda_1 x + \mu_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \lambda_2 x + \mu_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \lambda_3 x + \mu_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$



Coordenadas cilíndricas

Si (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas y (x, y, z) las coordenadas rectangulares de un punto P, entonces

$$x = r\cos\theta,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta,\ \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Coordenadas esféricas

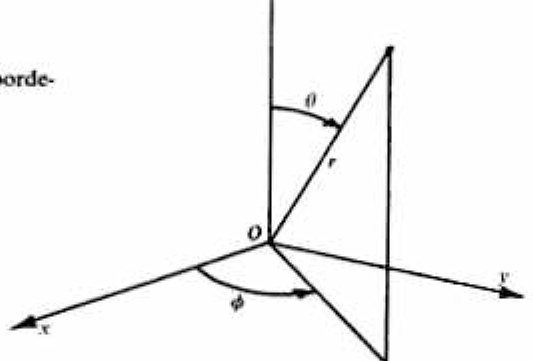
Si (r, θ, ϕ) son las coordenadas esféricas y (x, y, z) las coordenadas rectangulares de un punto P, entonces

$$x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi,\ y = r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$z = r\cos\theta,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \text{arc cos}\,\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$$



CURVAS Y SUPERFICIES

Las curvas y superficies que se dan a continuación son de uso frecuente en el estudio del cálculo.

En un sistema de coordenadas rectangulares:

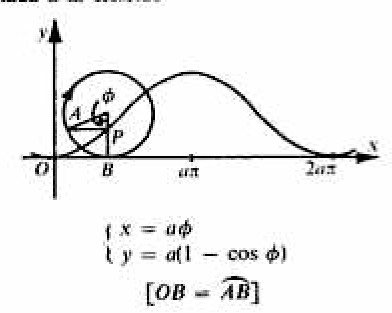
1. La curva es simétrica con respecto al eje Y si al cambiar x por $-x$ la ecuación no cambia.
2. La curva es simétrica con relación al eje X si al cambiar y por $-y$ la ecuación no cambia.
3. La curva es simétrica con respecto a los dos ejes si al cambiar x por $-x$ y y por $-y$ la ecuación no cambia. Es simétrica con relación al origen.
4. Si una curva es simétrica con respecto a la recta $y = x$, la nueva ecuación se obtiene de la original cambiando x por y.
5. Si una curva se gira 90°, la nueva ecuación se obtiene de la original remplazando x por y y y por $-x$.

En coordenadas polares:

1. Se dice que una curva es simétrica con respecto al eje polar si la ecuación no cambia al remplazar r por $-r$ y θ por $\pi - \theta$.
2. Si una curva dada es simétrica con respecto al polo, la nueva ecuación se obtiene de la original cambiando θ por $\pi + \theta$ o r por $-r$.
3. Si la curva se gira un ángulo α, con respecto al eje polar, la nueva ecuación se obtiene de la original remplazando θ por $\theta - \alpha$.

Curvas planas

Asociada a la cicloide

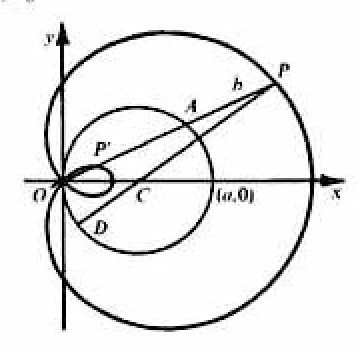


$$\begin{cases} x = a\phi \\ y = a(1 - \cos\phi) \end{cases}$$

$$[OB = \widehat{AB}]$$

Caracol de Pascal

(1) $a > b$

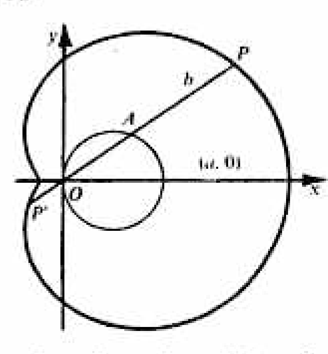


Si $a = 2b$, la curva se llama trisectriz, porque entonces

$$\sphericalangle\, OPD = \frac{1}{3} \sphericalangle\, OCD.$$

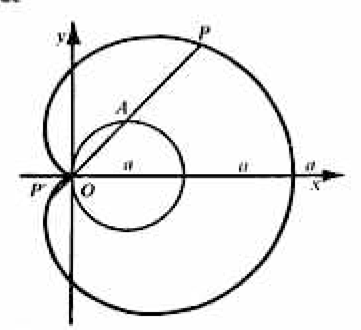
(2) $a = b$. Cardioide.

(3) $a < b$



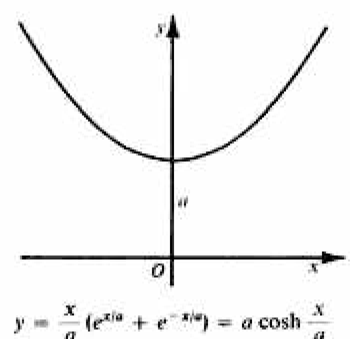
$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$
$$r = b + a\cos\theta$$
$$[P'A = AP = b]$$

Cardioide



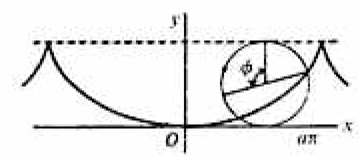
$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$
$$r = a(\cos\theta + 1)$$
o
$$r = a(\cos\theta - 1)$$
$$[P'A = AP = a]$$

Catenaria, coseno hiperbólico



$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a\cosh\frac{x}{a}$$

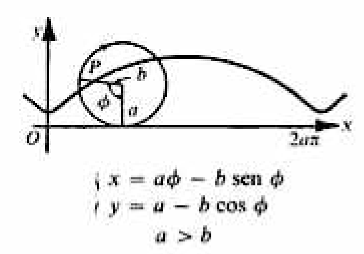
Cicloide (vértice en el origen)



$$x = 2a \text{ arc sen } \sqrt{y/2a} + \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\begin{cases} x = a(\phi + \text{sen}\,\phi) \\ y = a(1 - \cos\phi) \end{cases}$$

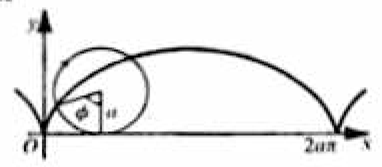
Cicloide



$$\begin{cases} x = a\phi - b\,\text{sen}\,\phi \\ y = a - b\cos\phi \end{cases}$$

$$a > b$$

Cicloide

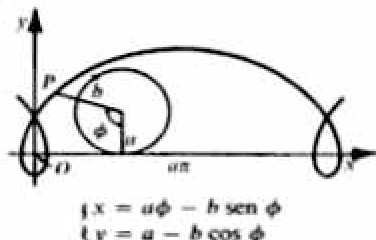


$$x = a \arc\cos \frac{a - y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\begin{cases} x = a(\phi - \operatorname{sen} \phi) \\ y = a(1 - \cos \phi) \end{cases}$$

(Para un arco: longitud de arco $= 8a$; área $= 3\pi a^2$)

Cicloide

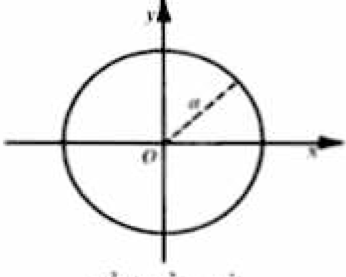


$$\begin{cases} x = a\phi - b \operatorname{sen} \phi \\ y = a - b \cos \phi \end{cases}$$

$$a < b$$

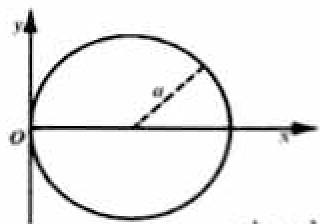
Circulo

(a)



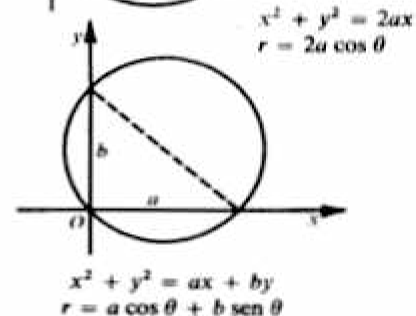
$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$r = a$$

(b)



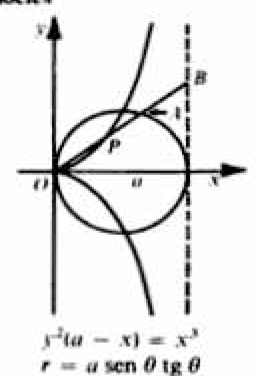
$$x^2 + y^2 = 2ax$$
$$r = 2a \cos \theta$$

(c)



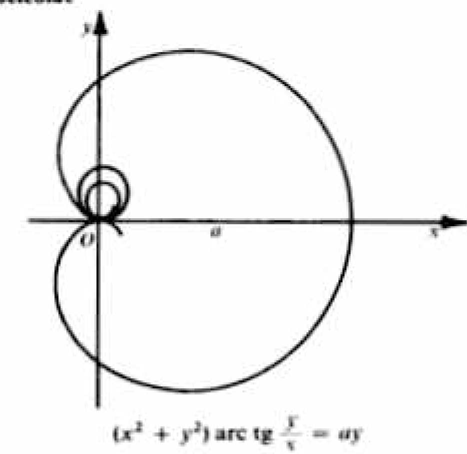
$$x^2 + y^2 = ax + by$$
$$r = a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta$$

Cisoide de Diocles



$$y^2(a - x) = x^3$$
$$r = a \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$$
$$[OP = AB]$$

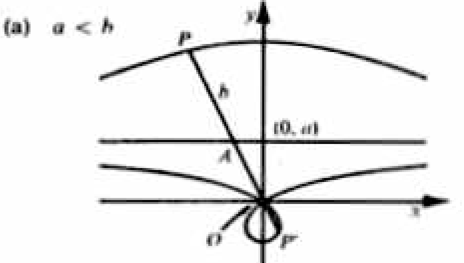
Cocleoide



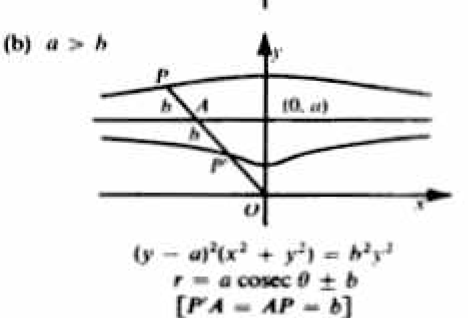
$$(x^2 + y^2) \arc\operatorname{tg} \frac{y}{x} = ay$$
$$r\theta = a \operatorname{sen} \theta$$

Concoide de Nicomedes

(a) $a < b$

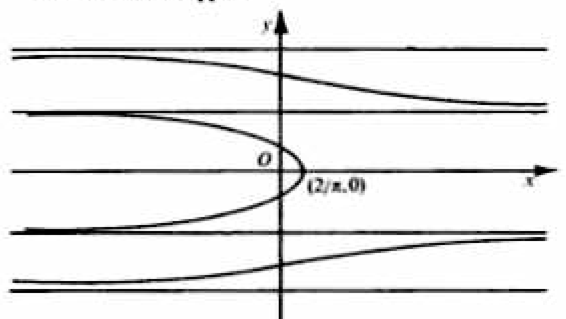


(b) $a > b$



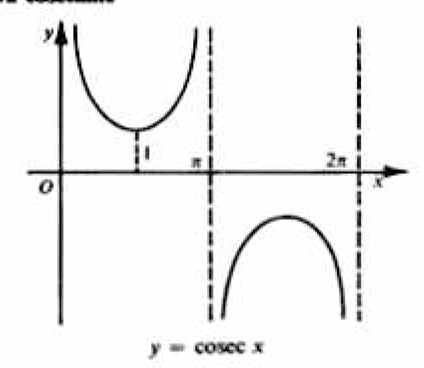
$$(y - a)^2(x^2 + y^2) = b^2y^2$$
$$r = a \operatorname{cosec} \theta \pm b$$
$$[P'A = AP = b]$$

Cuadratriz de Hippias



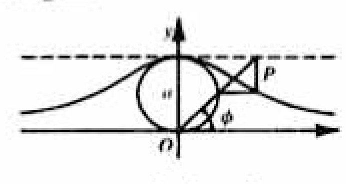
$y = x\,\mathrm{tg}(\pi y/2)$

Curva cosecante



$y = \operatorname{cosec} x$

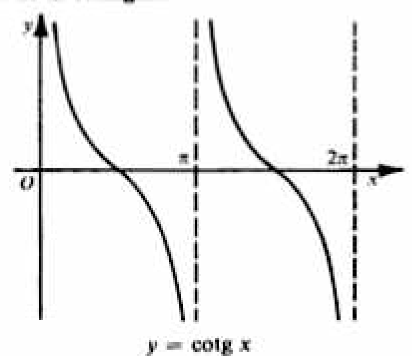
Curva de Agnesi



$y = a^3/(x^2 + a^2)$

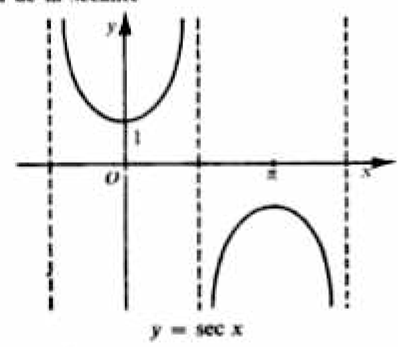
$x = a \operatorname{cotg} \phi$
$y = a \operatorname{sen}^2 \phi$

Curva de la cotangente



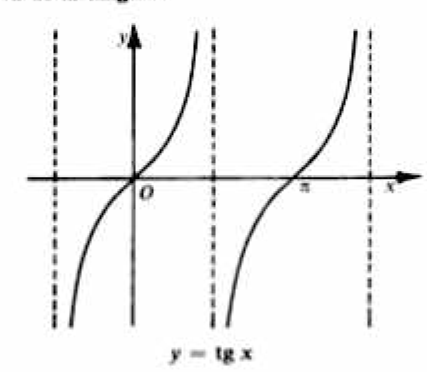
$y = \operatorname{cotg} x$

Curva de la secante



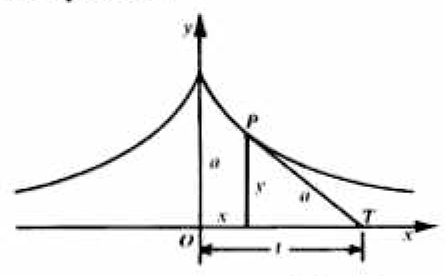
$y = \sec x$

Curva de la tangente



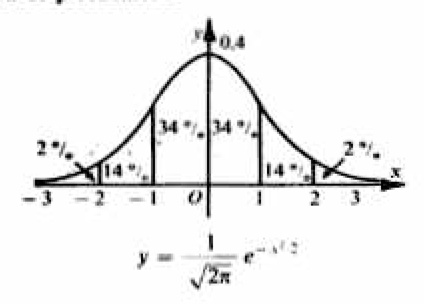
$y = \operatorname{tg} x$

Curva de persecución



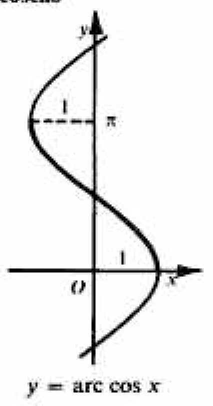
$x = a \operatorname{arc\,sech}(y/a) - \sqrt{a^2 - y^2}$
$x = t - a \operatorname{tgh}(t/a)$
$y = a \operatorname{sech}(t/a)$
$[PT = a]$

Curva de probabilidad



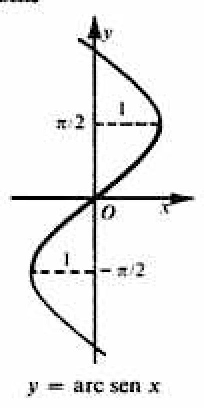
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Curva del arco coseno



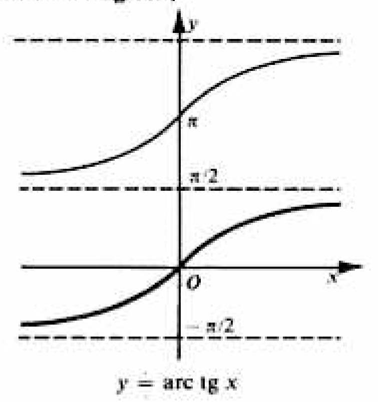
$y = \text{arc cos } x$

Curva del arco seno



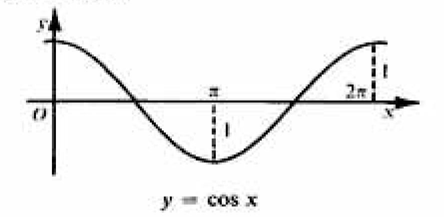
$y = \text{arc sen } x$

Curva del arco tangente



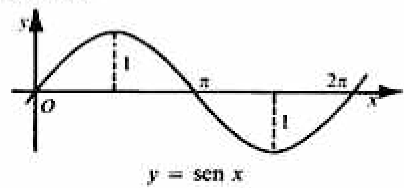
$y = \text{arc tg } x$

Curva del coseno



$y = \cos x$

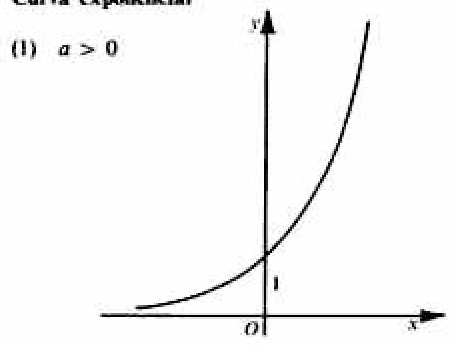
Curva del seno



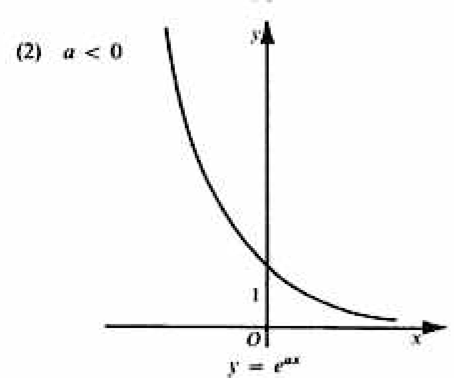
$y = \text{sen } x$

Curva exponencial

(1) $a > 0$



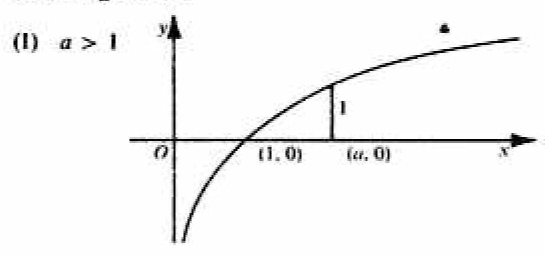
(2) $a < 0$



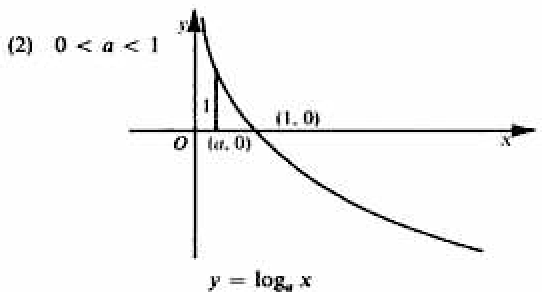
$y = e^{ax}$

Curva logarit'nica

(1) $a > 1$



(2) $0 < a < 1$

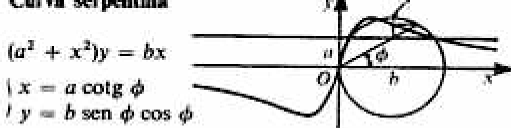


$y = \log_a x$

Curva serpentina

$(a^2 + x^2)y = bx$

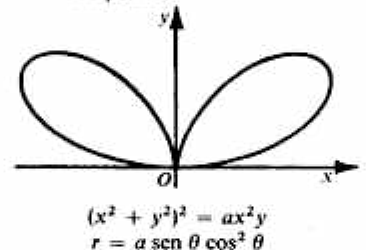
$$\begin{cases} x = a \operatorname{cotg} \phi \\ y = b \operatorname{sen} \phi \cos \phi \end{cases}$$



Curvas rosa

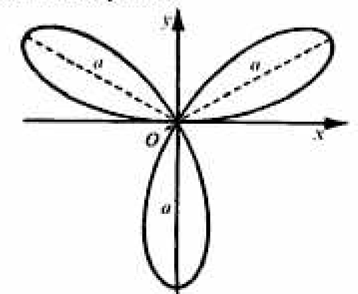
(1) Rosa de dos pétalos.
Vea: Lemniscata de Bernouilli.

(2) Rosa de dos pétalos



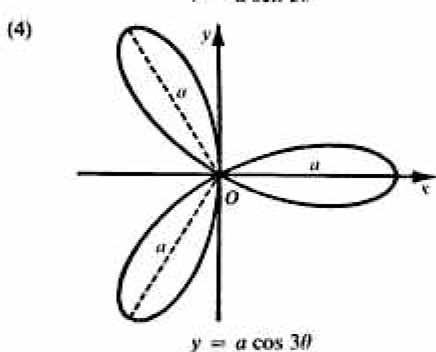
$(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$
$r = a \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta$

(3) Rosa de tres pétalos



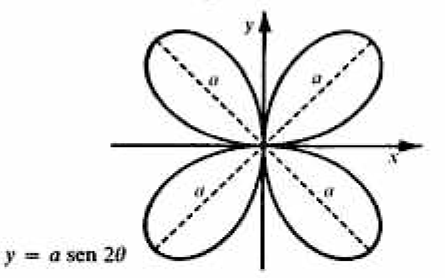
$r = a \operatorname{sen} 3\theta$

(4)



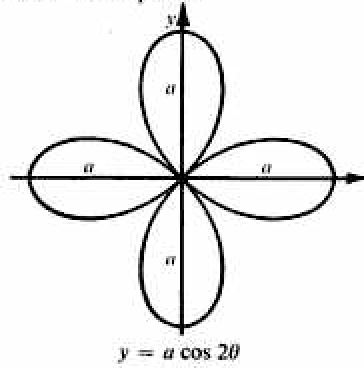
$y = a \cos 3\theta$

(5) Rosa de cuatro pétalos



$y = a \operatorname{sen} 2\theta$

(6) Rosa de cuatro pétalos

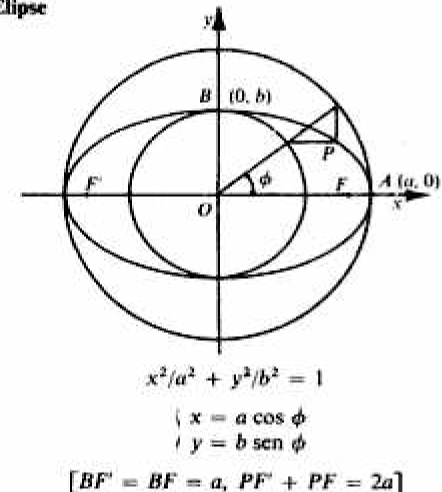


$y = a \cos 2\theta$

(7) Rosa de n pétalos

Las rosas $r = a \operatorname{sen} n\theta$ y $r = a \cos n\theta$ tienen, para n entero par, $2n$ pétalos; para n un entero impar, n pétalos. Las rosas $r = a \operatorname{sen} n\theta$ y $r = a \cos n\theta$ tienen, para n par, n pétalos; para n impar, $2n$ pétalos.

Elipse

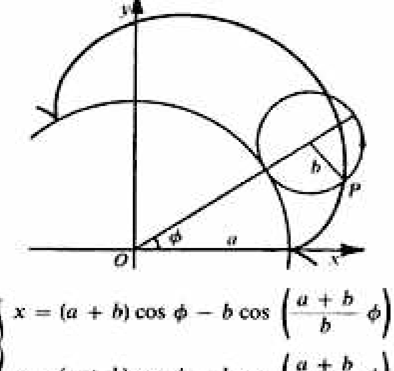


$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

$$\begin{cases} x = a \cos \phi \\ y = b \operatorname{sen} \phi \end{cases}$$

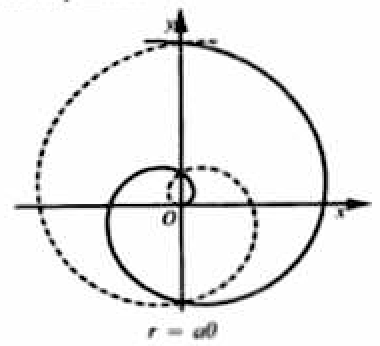
$[BF' = BF = a,\ PF' + PF = 2a]$

Epicicloide



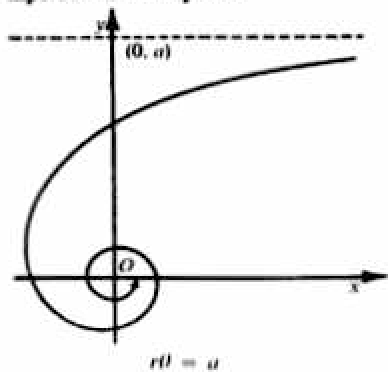
$$\begin{cases} x = (a + b) \cos \phi - b \cos \left(\dfrac{a + b}{b} \phi\right) \\ y = (a + b) \operatorname{sen} \phi - b \operatorname{sen} \left(\dfrac{a + b}{b} \phi\right) \end{cases}$$

Espiral de Arquímedes



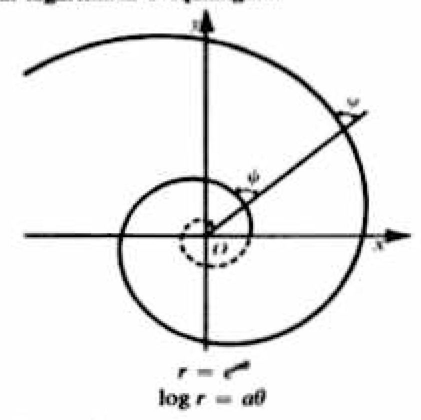
$r = a\theta$

Espiral hiperbólica o recíproca



$r\theta = a$

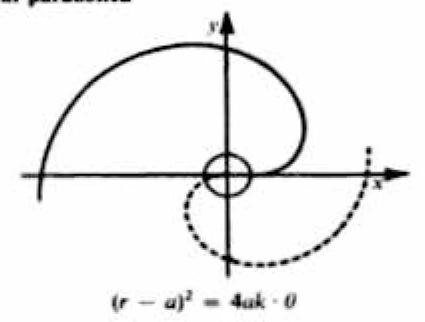
Espiral logarítmica o equiangular



$r = e^{a\theta}$

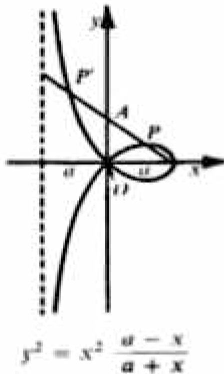
$\log r = a\theta$

Espiral parabólica



$(r - a)^2 = 4ak \cdot \theta$

Estrofoide

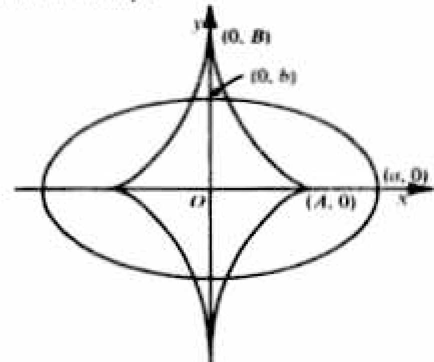


$$y^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x}$$

$r = a \cos 2\theta \sec \theta$

$[P'A = AP = OA]$

Evoluta de la elipse

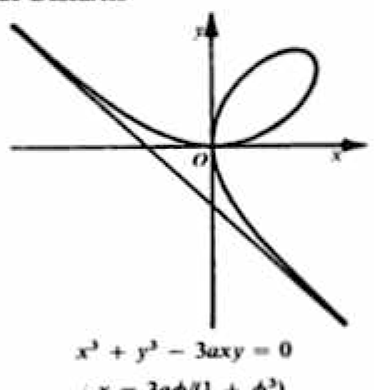


$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$

$$\begin{cases} x = A \cos^3 \phi \\ y = B \operatorname{sen}^3 \phi \end{cases}$$

$[A = (a^2 - b^2)/a,\ B = (a^2 - b^2)/b]$

Folium de Descartes

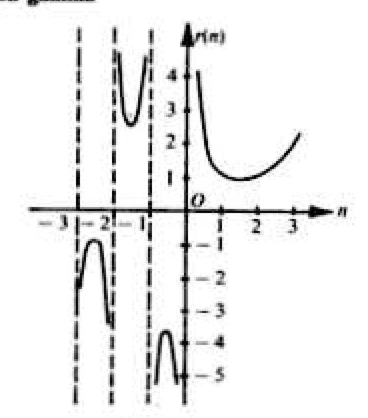


$x^3 + y^3 - 3axy = 0$

$$\begin{cases} x = 3a\phi/(1 + \phi^3) \\ y = 3a\phi^2/(1 + \phi^3) \end{cases}$$

$$r = \frac{3a \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}$$

Función gamma

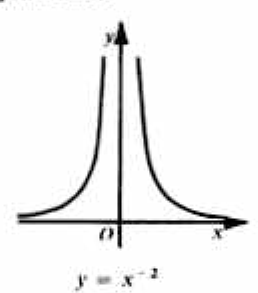


$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx \quad (n > 0)$$

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad (0 > n \neq -1, -2, -3, \ldots)$$

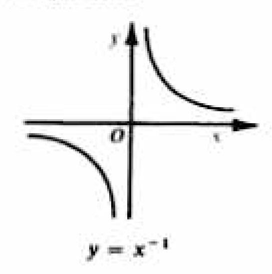
Funciones exponenciales

(1)



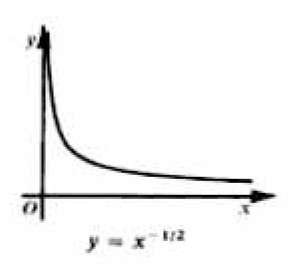
$y = x^{-2}$

(2) Hipérbola equilátera



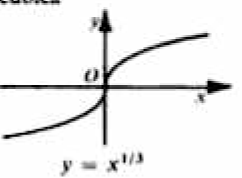
$y = x^{-1}$

(3)



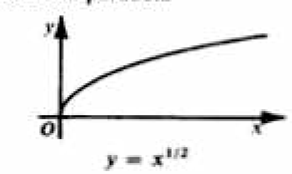
$y = x^{-1/2}$

(4) Parábola cúbica



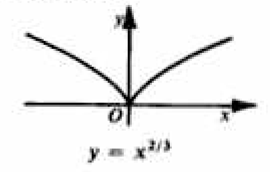
$y = x^{1/3}$

(5) Mitad de una parábola



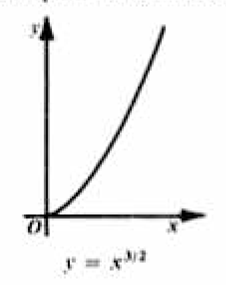
$y = x^{1/2}$

(6) Parábola semicúbica



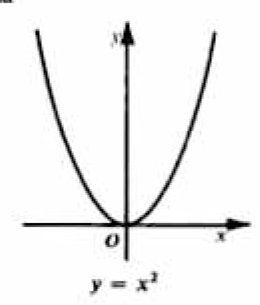
$y = x^{2/3}$

(7) Mitad de una parábola semicúbica



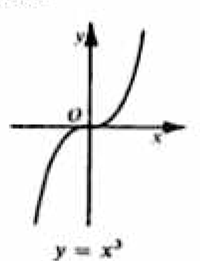
$y = x^{3/2}$

(8) Parábola



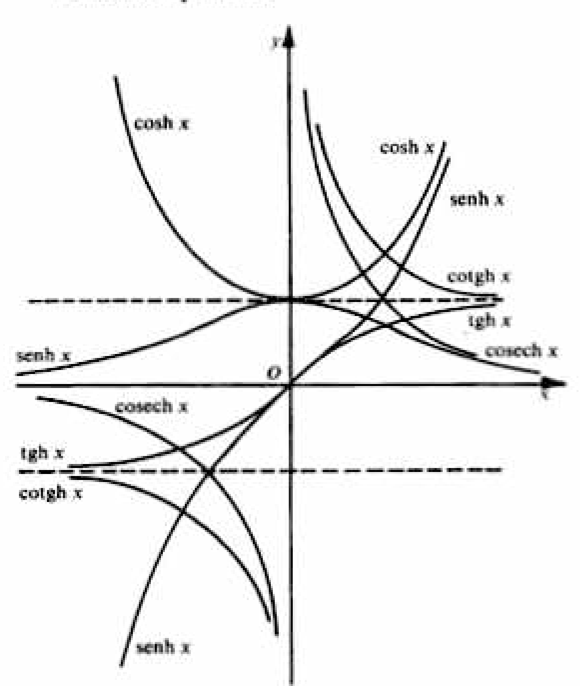
$y = x^2$

(9) Parábola cúbica



$y = x^3$

Funciones hiperbólicas

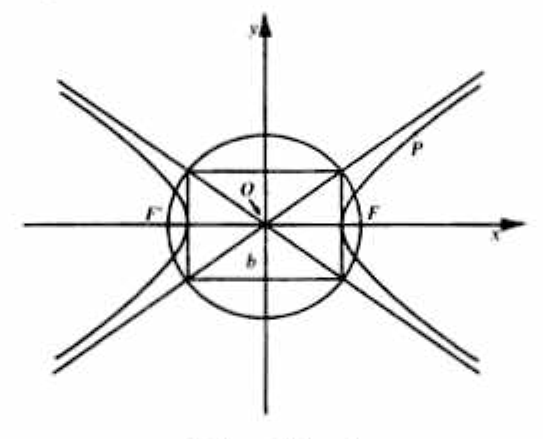


$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

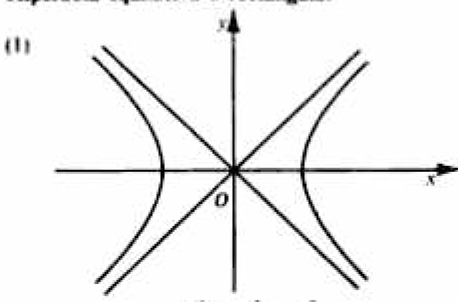
Hipérbola



$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
$[F'P - FP = 2a]$

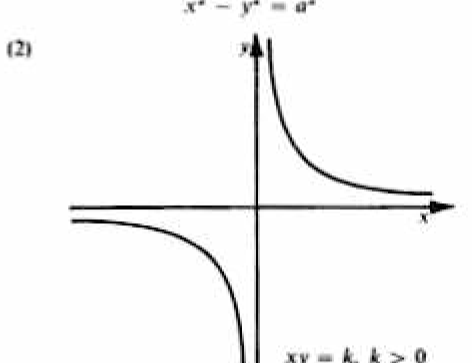
Hipérbola equilátera o rectangular

(1)



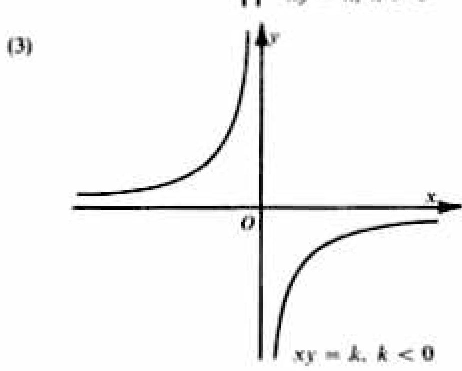
$x^2 - y^2 = a^2$

(2)



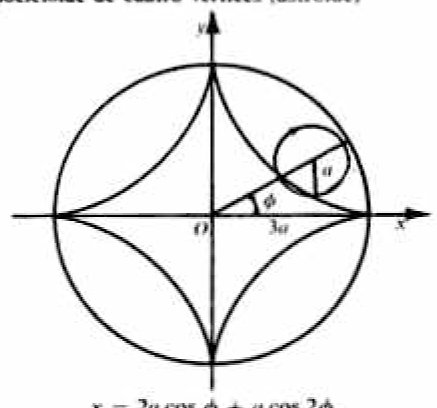
$xy = k,\ k > 0$

(3)



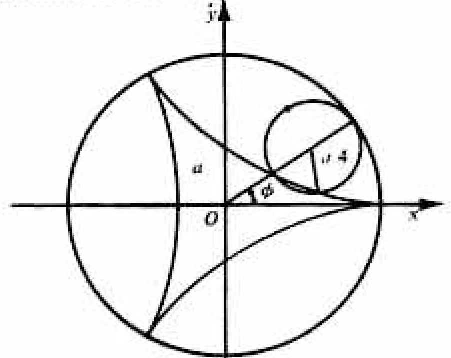
$xy = k,\ k < 0$

Hipocicloide de cuatro vértices (astroide)



$x = 2a \cos \phi + a \cos 2\phi$
$y = 2a \operatorname{sen} \phi - a \operatorname{sen} 2\phi$

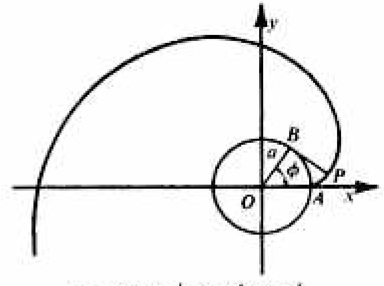
Hipocicloide de tres vértices



$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \phi \\ y = a \operatorname{sen}^3 \phi \end{cases}$$

Involuta del círculo

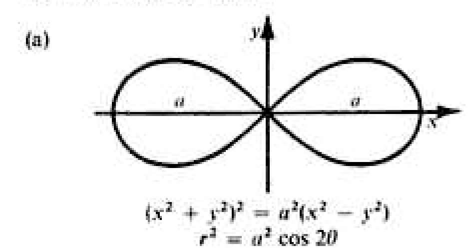


$$x = a \cos \phi + a\phi \operatorname{sen} \phi$$
$$y = a \operatorname{sen} \phi - a\phi \cos \phi$$

$$[BP = \widehat{BA}]$$

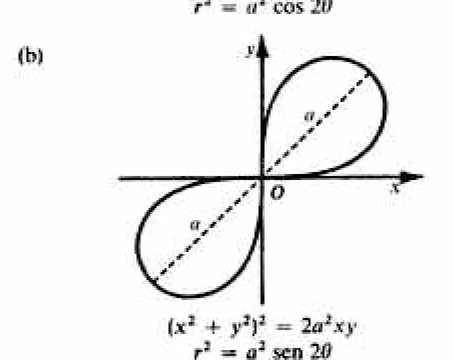
Lemniscata de Bernouilli

(a)



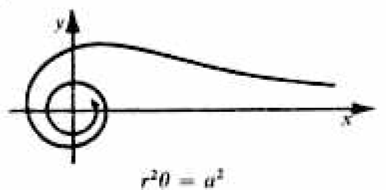
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$
$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

(b)



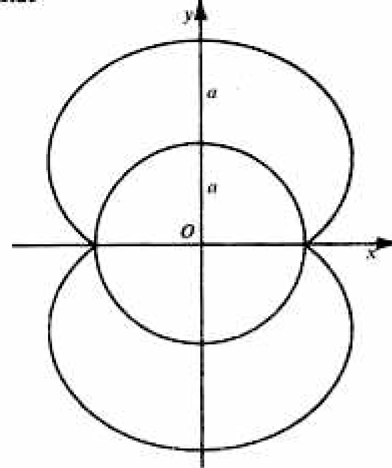
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$$
$$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Lituus



$$r^2\theta = a^2$$

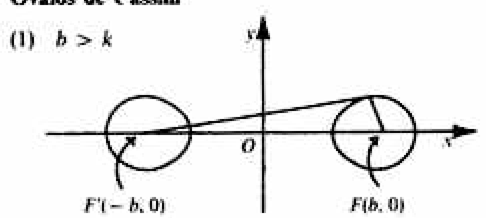
Nefroide



$$x = \frac{1}{2} a (3 \cos \phi - \cos 3\phi)$$
$$y = \frac{1}{2} a (3 \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} 3\phi)$$

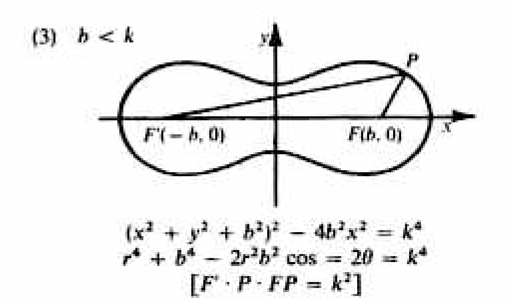
Ovalos de Cassini

(1) $b > k$



(2) $b = k$

(3) $b < k$



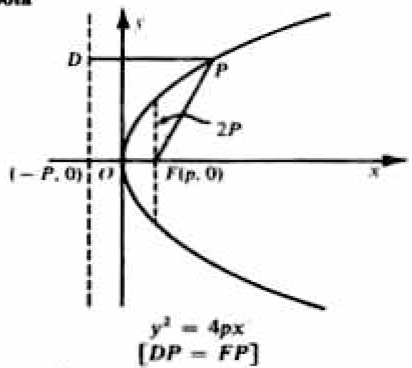
$$(x^2 + y^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2 = k^4$$
$$r^4 + b^4 - 2r^2b^2 \cos = 2\theta = k^4$$
$$[F' \cdot P \cdot FP = k^2]$$

(Estas curvas son secciones de un toro por planos paralelos al eje del toro.)

Parábola



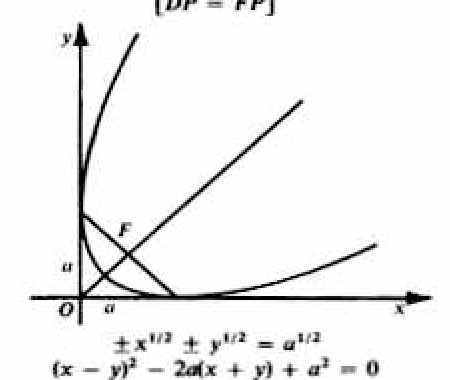
(1)



$$y^2 = 4px$$
$$[DP = FP]$$

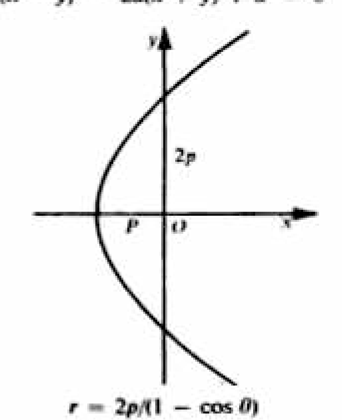


(2)



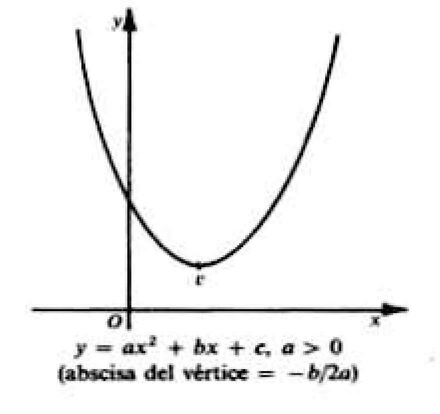
$$\pm x^{1/2} \pm y^{1/2} = a^{1/2}$$
$$(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0$$

(3)



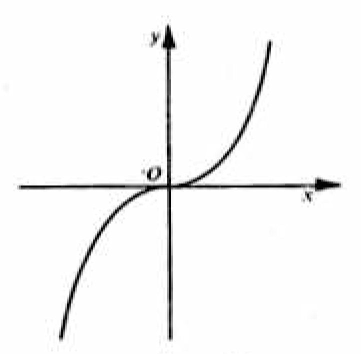
$$r = 2p/(1 - \cos\theta)$$

(4)



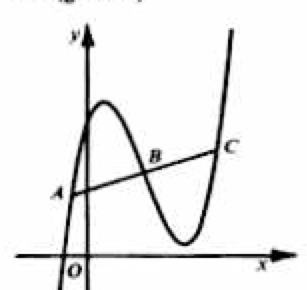
$$y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$$
(abscisa del vértice $= -b/2a$)

Parábola cúbica (especial)



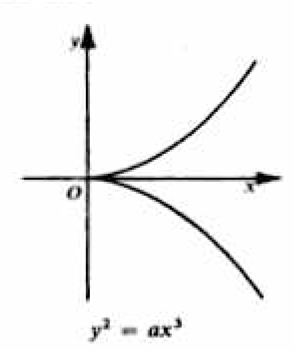
$$y = ax^3,\ a > 0$$
$$x^2 = \frac{1}{a}\sec^2\theta + \operatorname{tg}\theta,\ a > 0$$

Parábola cúbica (general)



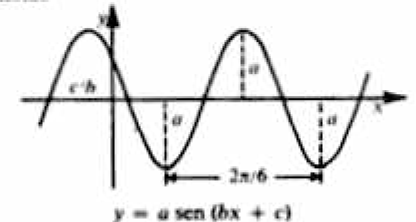
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a > 0$$
$$[AB = BC]$$
(abscisa de $B = -b/3a$)

Parábola semicúbica



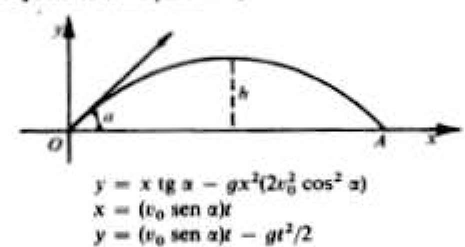
$$y^2 = ax^3$$
$$y = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^2\theta\sec\theta$$

Sinusoide



$y = a \operatorname{sen}(bx + c)$

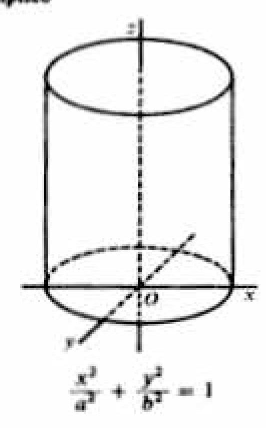
Trayectoria (una parábola)



$y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2(2v_0^2 \cos^2 \alpha)$
$x = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t$
$y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - gt^2/2$

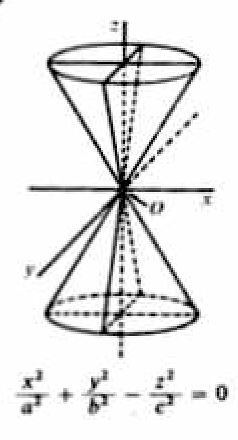
Superficies cuadráticas

Cilindro elíptico



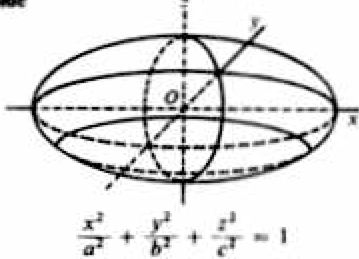
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cono elíptico



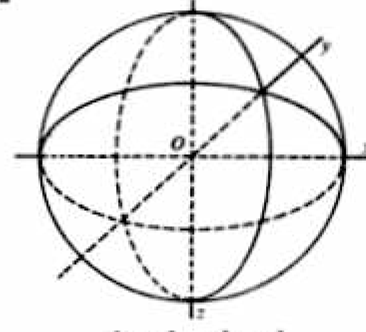
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Elipsoide



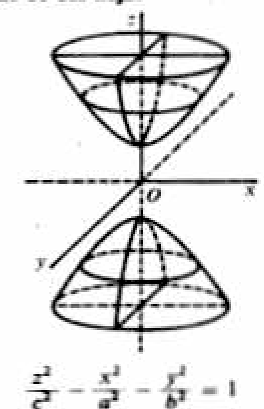
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Esfera



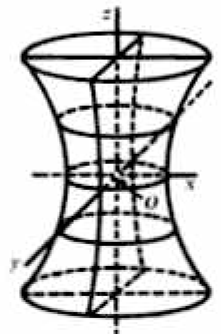
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Hiperboloide de dos hojas



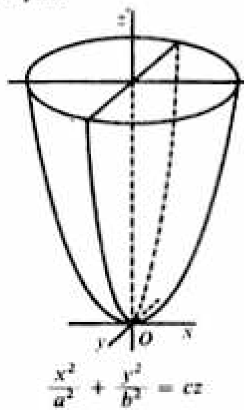
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hiperboloide de una hoja



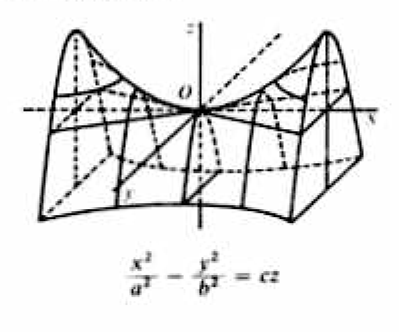
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Paraboloide elíptico



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Paraboloide hiperbólico



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

SERIES

La expresión entre paréntesis a continuación de las series indica la región de convergencia. De lo contrario, indica que converge para todos los valores finitos de x.

Binómica

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \ldots \qquad (y^2 < x^2)$$

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \frac{n(n-n)(n-2)x^3}{3!} + \ldots, \text{etc.} \qquad (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!} + \ldots, \text{etc.} \qquad (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + \ldots \qquad (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp 6x^5 + \ldots \qquad (x^2 < 1)$$

Reversión de series

Sea una de las series representada por

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \ldots (a_1 \neq 0)$$

encuentre los coeficientes de la serie

$$x = A_1y + A_2y^2 + A_3y^3 + A_4y^4 \ldots$$

$$A_1 = \frac{1}{a_1} \qquad A_2 = -\frac{a_2}{a_1^3} \qquad A_3 = \frac{1}{a_1^5}(2a_2^2 - a_1a_3)$$

$$A_4 = \frac{1}{a_4^7}(5a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - 5a_2^3)$$

$$A_5 = \frac{1}{a_1^9}(6a_1^2a_2a_4 + 3a_1^2a_3^2 + 14a_2^4 - a_1^3a_5 - 21a_1a_2^2a_3)$$

$$A_6 = \frac{1}{a_1^{11}}(7a_1^3a_2a_5 + 7a_1^3a_3a_4 + 84a_1a_2^3a_3 - a_1^4a_6 - 28a_1^2a_2^2a_4 - 28a_1^2a_2a_3^2 - 42a_2^5)$$

$$A_7 = \frac{1}{a_1^{13}}(8a_1^4a_2a_6 + 8a_1^4a_3a_5 + 4a_1^4a_4^2 + 120a_1^2a_2^3a_4 + 180a_1^2a_2^2a_3^2 + 132a_2^6 - a_1^5a_7 - 36a_1^3a_2^2a_5 - 72a_1^3a_2a_3a_4 - 12a_1^3a_3^3 - 330a_1a_2^4a_3)$$

Taylor

1. $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) +$
$+ \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$ (series de Taylor)

2. $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$
$= f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{2!} f''(h) + \frac{x^3}{3!} f'''(h) + \dots$

3. Si $f(x)$ es una función con derivadas de todos los órdenes en el intervalo $a \le x \le b$, entonces hay un valor x, con $a < x < b$, tal que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h),\ b = a + h,\ 0 < \theta < 1$$

o

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + (x-a)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + R_n,$$

de donde

$$R_n = \frac{f^{(n)}[a + \theta(x-a)]}{n!} (x-a)^n,\ 0 < \theta < 1$$

Las formas anteriores son conocidas como las series de Taylor, con término complementario.

Mclaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + x^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + R_n$$

de donde

$$R_n = \frac{x^n f^{(n)}(\theta x)}{n!},\ 0 < \theta < 1$$

Exponenciales

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$a^x = 1 + x \log_e a + \frac{(x \log_e a)^2}{2!} + \frac{(x \log_e a)^3}{3!} + \dots$$ (todos los valores reales de x)

$$e^x = e^a \left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots\right]$$

Logarítmicas

$$\log_e x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{(x-1)^2}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \dots$$ $\left(x > \frac{1}{2}\right)$

$$\log_e x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots$$ $(2 \ge x > 0)$

$$\log_e x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots\right] \qquad (x > 0)$$

$$\log_e (1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\log_e (n+1) - \log_e (n-1) = 2\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \dots\right]$$

$$\log_e (a+x) = \log_e a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \dots\right] \qquad (a > 0,\ -a < x < +\infty)$$

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots\right] \qquad -1 < x < 1$$

$$\log_e x = \log_e a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - + \dots \qquad 0 < x \leq 2a$$

Trigonométricas

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad \text{(todos los valores reales de } x\text{)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \dots \qquad \text{(todos los valores reales de } x\text{)}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots$$

$$\left[x^2 < \frac{\pi^2}{4} \text{ y } B_n \text{ representan los números de Bernouilli}\right]$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \dots - \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} - \dots$$

$$[x^2 < \pi^2 \text{ y } B_n \text{ representan los números de Bernouilli}]$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots + E_n x^{2n} + \dots$$

$$\left[x^2 < \frac{\pi^2}{4} \text{ y } E_n \text{ representan los números de Euler}\right]$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15\,120}x^5 + \frac{127}{604\,800}x^7 + \dots +$$

$$+ \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} + \dots \qquad [x^2 < \pi^2 \text{ y } B_n \text{ representan los números de Bernouilli})$$

$$\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\dots \qquad (x^2 < \infty)$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\dots \qquad (x^2 < \infty)$$

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \dots \qquad \left(x^2 < 1,\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,sen} x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots\right) \qquad (x^2 < 1{,}0 < \operatorname{arc\,cos} x < \pi)$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad (x^2 < 1)$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots \qquad (x > 1)$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots \qquad (x < -1)$$

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots \qquad (x^2 < 1)$$

$$\log_e \operatorname{sen} x = \log_e x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \dots \qquad (x^2 < \pi^2)$$

$$\log_e \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} \qquad \left(x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\log_e \operatorname{tg} x = \log_e x + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \dots \qquad \left(x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \frac{56x^7}{7!} + \dots$$

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \dots\right)$$

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \frac{37x^5}{5} + \dots \qquad \left(x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{sen} a - \\ - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \frac{(x-a)^4}{4!}\operatorname{sen} a + \dots$$

Hiperbólicas e hiperbólicas recíprocas

Tabla de expansión de algunas funciones en serie de potencias:

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \qquad |x| < \infty$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{tgh} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \dots \\ + \frac{(-1)^{n+1}\,2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \dots^{(1)} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}\,2^{2n}}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \dots^{(1)} \qquad 0 < |x| < \pi$$

$$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6}x^6 + \frac{1385}{8!}x^8 - \dots + \frac{(-1)^n}{2n!}E_n x^{2n} \pm \dots^{(2)} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15\,120} + \dots + \frac{2(-1)^n(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} + \dots^{(1)} \qquad 0 < |x| < \pi$$

$$\operatorname{Arg\,senh} x = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \dots + \\ + (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\,\dots\,2n(2n+1)}x^{2n+1} \pm \dots \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{arg\,cosh} x = \pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6}\right] \qquad x > 1$$

$$\operatorname{arg\,tgh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{arg\,cotgh} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \dots \qquad |x| > 1$$

[1] B_n representa los números de Bernouille.
[2] E_n representa los números de Euler.

INTEGRALES

FORMULAS ELEMENTALES

1. $\int a dx = ax.$
2. $\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx.$
3. $\int \phi(y)dx = \int \frac{\phi(y)}{y'} dy$, donde $y' = dy/dx.$
4. $\int (u + v)dx = \int udx + \int vdx$, donde u y v son una de las funciones de x.
5. $\int udv = uv - \int vdu.$
6. $\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx.$
7. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, (n \neq -1).$
8. $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \log f(x), [df(x) = f'(x)dx].$
9. $\int \frac{dx}{x} = \log x$ o $\log(-x).$
10. $\int \frac{f'(x)dx}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{f(x)}. [df(x) = f'(x)dx].$
11. $\int e^x dx = e^x.$
12. $\int e^{ax} dx = e^{ax}/a.$
13. $\int b^{ax} dx = \frac{b^{ax}}{a \log b}.$
14. $\int \log x \, dx = x \log x - x.$
15. $\int a^x \log a dx = a^x.$
16. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arc tg} \left(\frac{x}{a}\right)$ o $-\frac{1}{a} \text{arc cotg} \left(\frac{x}{a}\right).$
17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \text{arc tg} \left(\frac{x}{a}\right)$ o $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}.$
18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \text{arc cotg} \left(\frac{x}{a}\right)$ o $\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sen} \left(\frac{x}{a}\right)$ o $- \text{arc cos} \left(\frac{x}{a}\right).$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$
21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{arc cos} \left(\frac{a}{x}\right).$
22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a} \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right).$
23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \text{arc tg} \sqrt{\frac{a + bx}{-a}}$ o $\frac{-2}{\sqrt{a}} \text{arc tgh} \sqrt{\frac{a + bx}{a}}.$

FORMULAS QUE CONTIENEN $(a + bx)$

24. $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}, \ (n \neq -1).$

25. $\int x(a+bx)^n dx = \frac{1}{b^2(n+2)}(a+bx)^{n+2} - \frac{a}{b^2(n+1)}(a+bx)^{n+1}, \ (n \neq -1, -2).$

26. $\int x^2(a+bx)^n dx = \frac{1}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^{n+3}}{n+3} - 2a\frac{(a+bx)^{n+2}}{n+2} + a^2\frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1}\right].$

27. $\int x^m(a+bx)^n dx = \frac{x^{m+1}(a+bx)^n}{m+n+1} + \frac{an}{m+n+1}\int x^m(a+bx)^{n-1}dx.$

28. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log(a+bx).$

29. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}.$

30. $\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2b(a+bx)^2}.$

31. $\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a+bx - a\log(a+bx)]$

32. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\log(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right]$

33. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right]$

34. $\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\log(a+bx)\right]$

35. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx - 2a\log(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right]$

36. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^3}\left[\log(a+bx) + \frac{2a}{a+bx} - \frac{a^2}{2(a+bx)^2}\right]$

37. $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}.$

38. $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}.$

39. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}.$

40. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = -\frac{a+2bx}{a^2x(a+bx)} + \frac{2b}{a^3}\log\frac{a+bx}{x}.$

FORMULAS QUE CONTIENEN $c^2 \pm x^2, x^2 - c^2$

41. $\int \frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{1}{c}\text{arc tg}\frac{x}{c} \text{ o } \frac{1}{c}\text{arc sen}\frac{x}{\sqrt{c^2+x^2}}.$

42. $\int \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{1}{2c}\log\frac{c+x}{c-x} \text{ o } \frac{1}{c}\text{arc tgh}\left(\frac{x}{c}\right).$

43. $\int \frac{dx}{x^2-c^2} = \frac{1}{2c}\log\frac{x-c}{x+c} \text{ o } -\frac{1}{c}\text{arc tgh}\left(\frac{x}{c}\right).$

44. $\int \frac{dx}{(a+bx)(a'+b'x)} = \frac{1}{ab'-a'b}\cdot\log\left(\frac{a'+b'x}{a+bx}\right).$

45. $\int \frac{xdx}{(a+bx)(a'+b'x)} = \frac{1}{ab'-a'b}\left[\frac{a}{b}\log(a+bx) - \frac{a'}{b'}\log(a'+b'x)\right].$

46. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} = \frac{1}{ab'-a'b}\left(\frac{1}{a+bx} + \frac{b'}{ab'-a'b}\log\frac{a'+b'x}{a+bx}\right).$

47. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} = \frac{-a}{b(ab'-a'b)(a+bx)} - \frac{a'}{(ab'-a'b)^2}\log\frac{a'+b'x}{a+bx}.$

48. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} = \frac{a^2}{b^2(ab'-a'b)(a+bx)} + \frac{1}{(ab'-a'b)^2}\left[\frac{a'^2}{b'}\log(a'+b'x) + \frac{a(ab'-2a'b)}{b^2}\log(a+bx)\right]$$

49. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^n(a'+b'x)^m} = \frac{1}{(m-1)(ab'-a'b)} \left(\frac{1}{(a+bx)^{n-1}(a'+b'x)^{m-1}} - (m+n-2)b\int\frac{dx}{(a+bx)^n(a'+b'x)^{m-1}}\right)$$

FORMULAS QUE CONTIENEN $\sqrt{a+bx}$ y $\sqrt{a'+b'x}$ $\quad u = a + bx \quad v = a' + b'x \quad k = ab' - a'b$

50. $$\int \sqrt{uv}dx = \frac{k+2bv}{4bb'}\sqrt{uv} - \frac{k^2}{8bb'}\int\frac{dx}{\sqrt{uv}}.$$

51. $$\int \frac{dx}{v\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{kb'}}\log\frac{b'\sqrt{u}-\sqrt{kb'}}{b'\sqrt{u}+\sqrt{kb'}} = \frac{2}{\sqrt{-kb'}}\text{arc tg}\frac{b'\sqrt{u}}{\sqrt{-kb'}}.$$

52. $$\int \frac{dx}{\sqrt{uv}} = \frac{2}{\sqrt{bb'}}\log(\sqrt{bb'u}+b\sqrt{v}) = \frac{2}{\sqrt{-bb'}}\text{arc tg}\sqrt{\frac{-b'u}{bv}},$$
$$\text{o } \frac{2}{\sqrt{bb'}}\text{arc tgh}\sqrt{\frac{b'u}{bv}} = \frac{1}{\sqrt{-bb'}}\text{arc sen}\frac{2bb'x+a'b+ab'}{k}.$$

53. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{uv}} = \frac{\sqrt{uv}}{bb'} - \frac{ab'+a'b}{2bb'}\int\frac{dx}{\sqrt{uv}}.$$

54. $$\int \frac{dx}{v\sqrt{uv}} = -\frac{2\sqrt{u}}{k\sqrt{v}}.$$

55. $$\int \frac{\sqrt{v}dx}{\sqrt{u}} = \frac{1}{b}\sqrt{uv} - \frac{k}{2b}\int\frac{dx}{\sqrt{uv}}.$$

56. $$\int v^m\sqrt{u}dx = \frac{1}{(2m+3)b'}\left(2v^{m+1}\sqrt{u} + k\int\frac{v^mdx}{\sqrt{u}}\right).$$

57. $$\int \frac{dx}{v^m\sqrt{u}} = -\frac{1}{(m-1)k}\left(\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}} + \left(m-\frac{3}{2}\right)b\int\frac{dx}{v^{m-1}\sqrt{u}}\right) \ (a+bx^n).$$

58. $$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\text{arc tg}\frac{x\sqrt{ab}}{a}.$$

59. $$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{-ab}}\text{arc tgh}\frac{x\sqrt{-ab}}{a}.$$

60. $$\int \frac{xdx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\log\left(x^2+\frac{a}{b}\right).$$

61. $$\int \frac{x^2dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$$

62. $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$$

63. $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma}\frac{x}{(a+bx^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$$

64. $$\int \frac{xdx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{(a+bz)^{m+1}}, \ [z = x^2].$$

65. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{-x}{2mb(a+bx^2)^m} + \frac{1}{2mb}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$$

66. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^m} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}}.$$

67. $$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \log \frac{x^2}{a+bx^2}.$$

68. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a+bx^2}.$$

69. $$\int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{k}{3a} \left[\frac{1}{2} \log \frac{(k+x)^2}{k^2-kx+x^2} + \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-k}{k\sqrt{3}} \right], \ [bk^3 = a].$$

70. $$\int \frac{x\,dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk} \left[\frac{1}{2} \log \frac{k^2-kx+x^2}{(k+x)^2} + \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-k}{k\sqrt{3}} \right], \ [bk^3 = a].$$

71. $$\int \frac{dx}{x(a+bx^n)} = \frac{1}{an} \log \frac{x^n}{a+bx^n}.$$

72. $$\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{m+1}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(a+bx^n)^m} - \frac{b}{a} \int \frac{x^n\,dx}{(a+bx^n)^{m+1}}.$$

73. $$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^{p+1}} = \frac{1}{b} \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(a+bx^n)^p} - \frac{a}{b} \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(a+bx^n)^{p+1}}.$$

74. $$\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^{p+1}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}.$$

75. $$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)} \int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx.$$

76. $$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1} \int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx.$$

77. $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{b(m+np)} \left[x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - (m-n)a \int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p\,dx \right].$$

78. $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{m+np} \left[x^m(a+bx^n)^p + npa \int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\,dx \right].$$

79. $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{ma} \left[x^m(a+bx^n)^{p+1} - (m+np+n)b \int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p\,dx \right].$$

80. $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{an(p+1)} \left[-x^m(a+bx^n)^{p+1} + (m+np+n) \int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}\,dx \right].$$

FORMULAS QUE CONTIENEN $(a + bx + cx^2)$ $X = a + bx + cx^2$ y $q = 4ac - b^2$

81. $$\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{q}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{q}}.$$

82. $$\int \frac{dx}{X} = \frac{-2}{\sqrt{-q}} \operatorname{arc\,tgh} \frac{2cx+b}{\sqrt{-q}}.$$

83. $$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{-q}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{-q}}{2cx+b+\sqrt{-q}}.$$

84. $$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2cx+b}{qX} + \frac{2c}{q} \int \frac{dx}{X}.$$

85. $$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2cx+b}{q} \left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3c}{qX} \right) + \frac{6c^2}{q^2} \int \frac{dx}{X}.$$

86. $$\int \frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{2cx+b}{nqX^n} + \frac{2(2n-1)c}{qn} \int \frac{dx}{X^n}.$$

87. $$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2c} \log X - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X}.$$

88. $$\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2a}{qX} - \frac{b}{q} \int \frac{dx}{X}.$$

89. $$\int \frac{x\,dx}{X^{n+1}} = -\frac{2a+bx}{nqX^n} - \frac{b(2n-1)}{nq} \int \frac{dx}{X^n}.$$

90. $$\int \frac{x^2}{X}\,dx = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2} \log X + \frac{b^2-2ac}{2c^2} \int \frac{dx}{X}.$$

91. $\int \frac{x^2}{X^2}\,dx = \frac{(b^2 - 2ac)x + ab}{cqX} + \frac{2a}{q}\int \frac{dx}{X}.$

92. $\int \frac{x^m dx}{X^{n+1}} = -\frac{x^{m-1}}{(2n - m + 1)cX^n} - \frac{n - m + 1}{2n - m + 1}\cdot\frac{b}{c}\int \frac{x^{m-1}dx}{X^{n+1}} + \frac{m - 1}{2n - m + 1}\cdot\frac{a}{c}\int \frac{x^{m-2}dx}{X^{n+1}}.$

93. $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X}.$

94. $\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2a^2}\log\frac{X}{x^2} - \frac{1}{ax} + \left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}\right)\int \frac{dx}{X}.$

95. $\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2a(n - 1)X^{n-1}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xX^{n-1}}.$

96. $\int \frac{dx}{x^m X^{n+1}} = -\frac{1}{(m - 1)ax^{m-1}X^n} - \frac{n + m - 1}{m - 1}\cdot\frac{b}{a}$

$\int \frac{dx}{x^{m-1}X^{n+1}} - \frac{2n + m - 1}{m - 1}\cdot\frac{c}{a}\int \frac{dx}{x^{m-2}X^{n+1}}.$

FORMULAS QUE CONTIENEN $\sqrt{a + bx}$

97. $\int \sqrt{a + bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a + bx)^3}.$

98. $\int x\sqrt{a + bx}\,dx = -\frac{2(2a - 3bx)\sqrt{(a + bx)^3}}{15b^2}.$

99. $\int x^2\sqrt{a + bx}\,dx = \frac{2(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2)\sqrt{(a + bx)^3}}{105b^3}.$

100. $\int \frac{\sqrt{a + bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a + bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}}.$

101. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2\sqrt{a + bx}}{b}.$

102. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a + bx}} = -\frac{2(2a - bx)}{3b^2}\sqrt{a + bx}.$

103. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2(8a^2 - 4abx + 3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a + bx}.$

104. $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2x^m\sqrt{a + bx}}{(2m + 1)b} - \frac{2ma}{(2m + 1)b}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a + bx}}.$

105. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(\frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}}\right).$

106. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}} = \frac{-2}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tgh}\sqrt{\frac{a + bx}{a}}.$

107. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a + bx}} = -\frac{\sqrt{a + bx}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}}.$

108. $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{a + bx}} = -\frac{\sqrt{a + bx}}{(n - 1)ax^{n-1}} - \frac{(2n - 3)b}{(2n - 2)a}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{a + bx}}.$

109. $\int (a + bx)^{\pm n/2}dx = \frac{2(a + bx)^{\frac{2 \pm n}{2}}}{b(2 \pm n)}.$

110. $\int x(a + bx)^{\pm n/2}dx = \frac{2}{b^2}\left[\frac{(a + bx)^{\frac{4 \pm n}{2}}}{4 \pm n} - \frac{a(a + bx)^{\frac{2 \pm n}{2}}}{2 \pm n}\right].$

111. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^{m/2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x(a+bx)^{\frac{m-2}{2}}} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{(a+bx)^{m/2}}.$$

112. $$\int \frac{(a+bx)^{n/2}dx}{x} = b\int (a+bx)^{\frac{n-2}{2}}dx + a \int \frac{(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}}{x}\,dx.$$

FORMULAS QUE CONTIENEN $\sqrt{x^2 \pm a^2}$

113. $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})].$$

114. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

115. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\text{arc cos}\left(\frac{a}{x}\right) \text{ o } \frac{1}{a}\text{arc sec}\left(\frac{x}{a}\right).$$

116. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right).$$

117. $$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a\log\left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right).$$

118. $$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\ \text{arc cos}\,\frac{a}{x}.$$

119. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}.$$

120. $$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}.$$

121. $$\int \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}dx = \frac{1}{4}\left[x\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \pm \frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{2}\log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\right].$$

122. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

123. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

124. $$\int x\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}dx = \frac{1}{5}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^5}.$$

125. $$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

126. $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

127. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2x}.$$

128. $$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

129. $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

FORMULAS QUE CONTIENEN $\sqrt{a^2 - x^2}$

130. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{a}\right)\right].$$

131. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) \text{ o } -\text{arc cos}\left(\frac{x}{a}\right).$$

132. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right).$

133. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right).$

134. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}.$

135. $\int x\sqrt{a^2 - x^2}dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}.$

136. $\int \sqrt{(a^2 - x^2)^3}dx = \frac{1}{4}\left[x\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{2} \text{arc sen } \frac{x}{a}\right].$

137. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}}.$

138. $\int \frac{xdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

139. $\int x\sqrt{(a^2 - x^2)^3}dx = -\frac{1}{5}\sqrt{(a^2 - x^2)^5}.$

140. $\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{ arc sen } \frac{x}{a}\right).$

141. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \text{ arc sen } \frac{x}{a}.$

142. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2x}.$

143. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \text{arc sen } \frac{x}{a}.$

144. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \text{arc sen } \frac{x}{a}.$

FORMULAS QUE CONTIENEN $\sqrt{a + bx + cx^2}$ $X = a + bx + cx^2$, $q = 4ac - b^2$, y $k = \frac{4c}{q}$

145. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \left(\sqrt{X} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right).$

146. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ arc senh } \left(\frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right)$, si $c > 0$.

147. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \text{ arc sen } \left(\frac{-2cx - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$, si $c < 0$.

148. $\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)}{q\sqrt{X}}.$

149. $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)}{3q\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X} + 2k\right).$

150. $\int \frac{dx}{X^n\sqrt{X}} = \frac{2(2cx + b)\sqrt{X}}{(2n - 1)qX^n} + \frac{2k(n - 1)}{2n - 1} + \int \frac{dx}{X^{n-1}\sqrt{X}}.$

151. $\int \sqrt{X}dx = \frac{(2cx + b)\sqrt{X}}{4c} + \frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$

152. $\int X\sqrt{X}dx = \frac{(2cx + b)\sqrt{X}}{8c}\left(X + \frac{3}{2k}\right) + \frac{3}{8k^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$

153. $\int X^2 \sqrt{X} dx = \frac{(2cx + b)\sqrt{X}}{12c}\left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2}\right) + \frac{5}{16k^3}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$

154. $\int X^n \sqrt{X} dx = \frac{(2cx + b)X^n\sqrt{X}}{4(n + 1)c} + \frac{2n + 1}{2(n + 1)k}\int \frac{X^n dx}{\sqrt{X}}.$

155. $\int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{c} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$

156. $\int \frac{x dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx + 2a)}{q\sqrt{X}}.$

157. $\int \frac{x dx}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(2n - 1)cX^n} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X^n\sqrt{X}}.$

158. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2 - 4ac}{8c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$

159. $\int \frac{x^2 dx}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2 - 4ac)x + 2ab}{cq\sqrt{X}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$

160. $\int \frac{x^2 dx}{X^n\sqrt{X}} = \frac{(2b^2 - 4ac)x + 2ab}{(2n - 1)cqX^{n-1}\sqrt{X}} + \frac{4ac + (2n - 3)b^2}{(2n - 1)cq}\int \frac{dx}{X^{n-1}\sqrt{X}}.$

161. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x^2}{3c} - \frac{5bx}{12c^2} + \frac{5b^2}{8c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{3ab}{4c^2} - \frac{5b^3}{16c^3}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$

162. $\int x\sqrt{X} dx = \frac{X\sqrt{X}}{3c} - \frac{b}{2c}\int \sqrt{X} dx.$

163. $\int xX\sqrt{X} dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5c} - \frac{b}{2c}\int X\sqrt{X} dx.$

164. $\int \frac{xX^n dx}{\sqrt{X}} = \frac{X^n\sqrt{X}}{(2n + 1)c} - \frac{b}{2c}\int \frac{X^n dx}{\sqrt{X}}.$

165. $\int x^2\sqrt{X} dx = \left(x - \frac{5b}{6c}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4c} + \frac{5b^2 - 4ac}{16c^2}\int \sqrt{X} dx.$

166. $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(\frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$, si $a > 0$.

167. $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\text{arc sen}\left(\frac{bx + 2a}{x\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$, si $a < 0$.

168. $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{bx}$, si $a = 0$.

169. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$

170. $\int \frac{\sqrt{X} dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$

171. $\int \frac{\sqrt{X} dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} + c\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$

DIFERENTES FORMULAS ALGEBRAICAS

172. $\int\sqrt{2ax-x^2}dx = \frac{1}{2}[(x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2 \text{arc sen}(x-a)/a]$.

173. $\int\sqrt{ax^2+c}dx = \frac{x}{2}\sqrt{ax^2+c} + \frac{c}{2\sqrt{a}}\log(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c}), [a > 0]$.

$$= \frac{x}{2}\sqrt{ax^2+c} + \frac{c}{2\sqrt{-a}}\text{arc sen}\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right), [a < 0].$$

174. $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \text{arc cos}\left(\frac{a-x}{a}\right)$.

175. $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}\cdot\sqrt{a'+b'x}} = \frac{2}{\sqrt{-bb'}}\text{arc tg}\sqrt{\frac{-b'(a+bx)}{b(a'+b'x)}}$.

176. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \text{arc sen } x - \sqrt{1-x^2}$.

177. $\int\frac{dx}{\sqrt{a \pm 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\log(\pm b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a \pm 2bx + cx^2})$.

178. $\int\frac{dx}{\sqrt{a \pm 2bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\text{arc sen}\frac{cx \mp b}{\sqrt{b^2+ac}}$.

179. $\int\frac{xdx}{\sqrt{a \pm 2bx + cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a \pm 2bx + cx^2} - \frac{b}{\sqrt{c^3}}\log(\pm b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a \pm 2bx + cx^2}$.

180. $\int\frac{xdx}{\sqrt{a \pm 2bx - cx^2}} = -\frac{1}{c}\sqrt{a \pm 2bx - cx^2} \pm \frac{b}{\sqrt{c^3}}\text{arc sen}\frac{cx \mp b}{\sqrt{b^2+ac}}$.

FORMULAS TRIGONOMETRICAS

181. $\int\text{sen } xdx = -\cos x$, o verseno x.

182. $\int\cos xdx = \text{sen } x$, o $-$ coverseno x.

183. $\int\text{tg } xdx = -\log\cos x$.

184. $\int\text{cotg } xdx = \log\text{sen } x$.

185. $\int\sec xdx = \log\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

186. $\int\text{cosec } xdx = \log\text{tg}\frac{1}{2}x$.

187. $\int\text{sen}^2 xdx = -\frac{1}{2}\cos x\,\text{sen } x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\text{sen } 2x$.

188. $\int\text{sen}^3 xdx = -\frac{1}{3}\cos x(\text{sen}^2 x + 2)$.

189. $\int\text{sen}^n xdx = -\frac{\text{sen}^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int\text{sen}^{n-2}xdx$.

190. $\int\cos^2 xdx = \frac{1}{2}\text{sen } x\cos x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen } 2x$.

191. $\int\cos^3 xdx = \frac{1}{3}\text{sen } x(\cos^2 x + 2)$.

192. $\int\cos^n xdx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\text{sen } x + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx$.

193. $\int\text{sen}\frac{x}{a}dx = -a\cos\frac{x}{a}$.

194. $\int \cos \frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{sen} \frac{x}{a}.$

195. $\int \operatorname{sen} (a + bx) dx = -\frac{1}{b} \cos (a + bx).$

196. $\int \cos (a + bx) dx = \frac{1}{b} \operatorname{sen} (a + bx).$

197. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

198. $\int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right).$

199. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

200. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$

201. $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{sen} x} = \mp \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right).$

202. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

203. $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{cotg} \frac{x}{2}.$

204. $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{a \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + b + \sqrt{b^2 - a^2}}.$

205. $$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{a + b} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + a + b}{\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x - a - b} \right).$$

206. $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \frac{\operatorname{sen} (m - n)x}{2(m - n)} - \frac{\operatorname{sen} (m + n)x}{2(m + n)}, [m^2 \neq n^2].$

207. $\int x \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}.$

208. $\int x^2 \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \operatorname{sen} 2x - \frac{x \cos 2x}{4}.$

209. $\int x \operatorname{sen}^3 x dx = \frac{x \cos 3x}{12} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{36} - \frac{3}{4} x \cos x + \frac{3}{4} \operatorname{sen} x.$

210. $\int \operatorname{sen}^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}.$

211. $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\operatorname{sen} (m - n)x}{2(m - n)} + \frac{\operatorname{sen} (m + n)x}{2(m + n)}, [m^2 \neq n^2].$

212. $\int x \cos^2 x dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8}.$

213. $\int x^2 \cos^2 x dx = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \operatorname{sen} 2x + \frac{x \cos 2x}{4}.$

214. $\int x \cos^3 x dx = \frac{x \operatorname{sen} 3x}{12} + \frac{\cos 3x}{36} + \frac{3}{4} x \operatorname{sen} x + \frac{3}{4} \cos x.$

215. $\int \cos^4 x dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}.$

216. $\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{x^m} = -\frac{\operatorname{sen} x}{(m - 1)x^{m-1}} + \frac{1}{m - 1} \int \frac{\cos x dx}{x^{m-1}}.$

217. $\int \frac{\cos x dx}{x^m} = -\frac{\cos x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{x^{m-1}}.$

218. $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \log \cos x.$

219. $\int \operatorname{tg}^4 x dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x.$

220. $\int \operatorname{cotg}^3 x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x - \log \operatorname{sen} x.$

221. $\int \operatorname{cotg}^4 x dx = -\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x + x.$

222. $\int \operatorname{cotg}^n x dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x dx, [n \neq 1].$

223. $\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x.$

224. $\int \operatorname{sen} mx \cos nx dx = -\frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)}.$

225. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x - x\right).$

226. $\int \operatorname{sen} x \cos^m x dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}.$

227. $\int \operatorname{sen}^m x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}.$

228. $\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x dx = \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+1} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \operatorname{sen}^n x dx.$

229. $\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x dx.$

230. $\int \frac{\cos^m x dx}{\operatorname{sen}^n x} = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x}.$

231. $\int \frac{\cos^m x dx}{\operatorname{sen}^n x} = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x dx}{\operatorname{sen}^n x}.$

232. $\int \frac{\operatorname{sen}^m x dx}{\cos^n x} = -\int \frac{\cos^m \left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{sen}^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}.$

233. $\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$

234. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x dx}{\cos x} = -\operatorname{sen} x + \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

235. $\int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen} x} = -\operatorname{cosec} x.$

236. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \log \operatorname{tg} x.$

237. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

238. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^{n-2} x}, (n \neq 1).$

239. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

240. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = -2 \operatorname{cotg} 2x.$

241. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x \cos^n x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2} x \cdot \cos^n x}.$

242. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2} x}.$

243. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x.$

244. $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x.$

245. $\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx.$

246. $\int \operatorname{cotg}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x - x.$

247. $\int \operatorname{cotg}^n x dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x dx.$

248. $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x.$

249. $\int \sec^n x dx = \int \frac{dx}{\cos^n x}.$

250. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x.$

251. $\int \operatorname{cosec}^n x dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x}.$

252. $\int x \operatorname{sen} x dx = \operatorname{sen} x - x \cos x.$

253. $\int x^2 \operatorname{sen} x dx = 2x \operatorname{sen} x - (x^2 - 2) \cos x.$

254. $\int x^3 \operatorname{sen} x dx = (3x^2 - 6) \operatorname{sen} x - (x^3 - 6x) \cos x.$

255. $\int x^m \operatorname{sen} x dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x dx.$

256. $\int x \cos x dx = \cos x + x \operatorname{sen} x.$

257. $\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \operatorname{sen} x.$

258. $\int x^3 \cos x dx = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6x) \operatorname{sen} x.$

259. $\int x^m \cos x dx = x^m \operatorname{sen} x - m \int x^{m-1} \operatorname{sen} x dx.$

260. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \frac{x^9}{9 \cdot 9!} \cdots$

261. $\int \frac{\cos x}{x} dx = \log x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \frac{x^8}{8 \cdot 8!} \cdots$

262. $\int \operatorname{arc\,sen} x dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2}.$

263. $\int \operatorname{arc\,cos} x dx = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1 - x^2}.$

264. $\int \operatorname{arc\,tg} x dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \log (1 + x^2).$

265. $\int \operatorname{arc\,cotg} x dx = x \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2} \log (1 + x^2).$

266. $\int \operatorname{arc\,sec} x dx = x \operatorname{arc\,sec} x - \log (x + \sqrt{x^2 - 1}).$

267. $\int \operatorname{arc\,cosec} x dx = x \operatorname{arc\,cosec} x + \log (x + \sqrt{x^2 - 1}).$

268. $\int \operatorname{arc\,vers} x dx = (x - 1) \operatorname{arc\,vers} x + \sqrt{2x - x^2}.$

269. $\int \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$

270. $\int \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$

271. $\int \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\log(a^2 + x^2).$

272. $\int \operatorname{arc\,cotg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arc\,cotg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\log(a^2 + x^2).$

273. $\int (\operatorname{arc\,sen} x)^2\,dx = x(\operatorname{arc\,sen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2}\,(\operatorname{arc\,sen} x).$

274. $\int (\operatorname{arc\,cos} x)^2\,dx = x(\operatorname{arc\,cos} x)^2 - 2x - 2\sqrt{1 - x^2}\,(\operatorname{arc\,cos} x).$

275. $\int x\cdot\operatorname{arc\,sen} x\,dx = \frac{1}{4}\left[(2x^2 - 1)\operatorname{arc\,sen} x + x\sqrt{1 - x^2}\right].$

276. $\int x^n\operatorname{arc\,sen} x\,dx = \frac{x^{n+1}\operatorname{arc\,sen} x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

277. $\int x^n\operatorname{arc\,cos} x\,dx = \frac{x^{n+1}\operatorname{arc\,cos} x}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

278. $\int x^n\operatorname{arc\,tg} x\,dx = \frac{x^{n+1}\operatorname{arc\,tg} x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{1 + x^2}.$

279. $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x\,dx}{x^2} = \log\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) - \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}.$

280. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x^2} = \log x - \frac{1}{2}\log(1 + x^2) - \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}.$

FORMULAS LOGARITMICAS

281. $\int \log x\,dx = x\log x - x.$

282. $\int x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}.$

283. $\int x^2\log x\,dx = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}.$

284. $\int x^p\log(ax)\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\log(ax) - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}\ [p \neq -1].$

285. $\int (\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x.$

286. $\int (\log x)^n\,dx = x(\log x)^n - n\int(\log x)^{n-1}\,dx,\ [n \neq -1].$

287. $\int \frac{(\log x)^n}{x}\,dx = \frac{1}{n+1}(\log x)^{n+1}.$

288. $\int \frac{dx}{\log x} = \log(\log x) + \log x + \frac{(\log x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\log x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$

289. $\int \frac{dx}{x\log x} = \log(\log x).$

290. $\int \frac{dx}{x(\log x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}}.$

291. $\int \frac{x^m\,dx}{(\log x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int\frac{x^m\,dx}{(\log x)^{n-1}}.$

292. $\int x^m\log x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right].$

293. $\int x^m(\log x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\log x)^{n-1}\,dx,\ [m, n \neq -1].$

294. $\int \operatorname{sen}\log x\,dx = \frac{1}{2}x\operatorname{sen}\log x - \frac{1}{2}x\cos\log x.$

295. $\int \cos\log x\,dx = \frac{1}{2}x\operatorname{sen}\log x + \frac{1}{2}x\cos\log x.$

FORMULAS EXPONENCIALES

296. $\int e^x dx = e^x.$

297. $\int e^{-x} dx = -e^{-x}.$

298. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}.$

299. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1).$

300. $\int x^m e^{ax} dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{ax} dx.$

301. $\int \frac{e^{ax} dx}{x} = \log x + \frac{ax}{1!} + \frac{a^2x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{a^3x^3}{3 \cdot 3!} + \dots$

302. $\int \frac{e^{ax}}{x^m} dx = -\frac{1}{m-1}\frac{e^{ax}}{x^{m-1}} + \frac{a}{m-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{m-1}} dx.$

303. $\int e^{ax} \log x dx = \frac{e^{ax} \log x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x} dx.$

304. $\int e^{ax} \cdot \operatorname{sen} px dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} px - p \cos px)}{a^2 + p^2}.$

305. $\int e^{ax} \cdot \cos px dx = \frac{e^{ax}(a \cos px + p \operatorname{sen} px)}{a^2 + p^2}.$

306. $\int \frac{dx}{1 + e^x} = x - \log(1 + e^x) = \log \frac{e^x}{1 + e^x}.$

307. $\int \frac{dx}{a + be^{px}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ap}\log(a + be^{px}).$

308. $\int \frac{dx}{ae^{mx} + be^{-mx}} = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$

309. $\int e^{ax} \operatorname{sen} px dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} px - p \cos px)}{a^2 + p^2}.$

310. $\int e^{ax} \cos px dx = \frac{e^{ax}(a \cos px + p \operatorname{sen} px)}{a^2 + p^2}.$

311. $\int e^{ax} \operatorname{sen}^n bx dx = \frac{1}{a^2 + n^2b^2}\left[(a \operatorname{sen} bx - nb \cos bx)e^{ax} \operatorname{sen}^{n-1} bx + n(n-1)b^2 \int e^{ax} \operatorname{sen}^{n-2} bx \cdot dx\right].$

312. $\int e^{ax} \cos^n bx dx = \frac{1}{a^2 + n^2b^2}\left[(a \cos bx + nb \operatorname{sen} bx)e^{ax} \cos^{n-1} bx + n(n-1)b^2 \int e^{ax} \cos^{n-2} bx dx\right].$

313. $\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x.$

314. $\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x.$

315. $\int \operatorname{tgh} x dx = \log \cosh x.$

316. $\int \operatorname{cotgh} x dx = \log \operatorname{senh} x.$

317. $\int \operatorname{sech} x dx = 2 \operatorname{arc\,tg}(e^x).$

318. $\int \operatorname{cosech} x dx = \log \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right).$

319. $\int x \operatorname{senh} x dx = x \cosh x - \operatorname{senh} x.$

320. $\int x \cosh x dx = x \operatorname{senh} x - \cosh x.$

321. $\int \operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x dx = -\operatorname{sech} x.$

322. $\int \operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x dx = -\operatorname{cosech} x.$

INTEGRALES DEFINIDAS

323. $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1}dx = \Gamma(n).$

324. $\Gamma(n)$, la función gamma es finita si $n > 0$.

325. $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n).$

326. $\Gamma(n)\cdot\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}.$

327. $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n =$ entero > 0.

328. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$ (Vea los valores $\Gamma(n)$ en la tabla de integrales, pág. 324.)

329. $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$

330. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{m-1},$ $[m > 1].$

331. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^p} = \pi \operatorname{cosec} p\pi,$ $[p < 1].$

332. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1-x)x^p} = -\pi \operatorname{cotg} p\pi,$ $[p < 1].$

333. $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi},$ $[0 < p < 1].$

334. $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}},$ $[0 < m < n].$

335. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$

336. $\int_0^\infty \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}$, si $a > 0$; 0, si $a = 0$; $-\frac{\pi}{2}$, si $a < 0$.

337. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (n)}\cdot\frac{\pi}{2},$ [n e igual entero],

$= \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \ldots n},$ [n y distinto entero],

$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$ $[n > -1].$

338. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}$, si $m > 0$; 0, si $m = 0$; $-\frac{\pi}{2}$, si $m < 0$.

339. $\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{x} = \infty.$

340. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$

341. $\int_0^\pi \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} mx\,dx = \int_0^\pi \cos kx \cdot \cos mx\,dx = 0,$ [$k \neq m$; $m, n =$ enteros].

342. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x \cos mx\,dx}{x} = 0,$ $m < -1$ o $m > 1$, $= \frac{\pi}{4}$, si $m = \pm 1$; $= \frac{\pi}{2}$, si $m^2 < 1$.

343. $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 mx\,dx = \int_0^\pi \cos^2 mx\,dx = \frac{\pi}{2}.$

344. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$

345. $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-m},$ $[m > 0],$

$= \frac{\pi}{2}e^{m},$ $[m < 0].$

346. $\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

347. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\cos x dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

348. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a\cos x} = \frac{\operatorname{arc\,cos} a}{\sqrt{1-a^2}},$ $[a < 1].$

349. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}},$ $[a^2 < 1].$

350. $\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}.$

351. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}},$ $[n > -1, a > 0].$

$= \frac{n!}{a^{n+1}},$ [n entero positivo, $a > 0$].

352. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2a}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$ $[a > 0].$

353. $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}.$

354. $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

355. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$

356. $\int_0^\infty e^{(-x^2-a^2/x^2)}dx = \frac{e^{-2a}\sqrt{\pi}}{2}.$

357. $\int_0^\infty e^{-nx}\sqrt{x}dx = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$

358. $\int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$

359. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos mx dx = \frac{a}{a^2+m^2},$ $[a > 0].$

360. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} mx dx = \frac{m}{a^2+m^2},$ $[a > 0].$

361. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}\cdot e^{-b^2/4a^2}}{2a},$ $[a > 0].$

362. $\int_0^1 (\log x)^n dx = (-1)^n\cdot n!$

363. $\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

364. $\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \sqrt{\pi}.$

365. $\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^n dx = n!$

366. $\int_0^1 x\log(1-x)dx = -\frac{3}{4}.$

367. $\int_0^1 x\log(1+x)dx = \frac{1}{4}.$

368. $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}dx = -\frac{\pi^2}{12}.$

369. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}dx = -\frac{\pi^2}{6}.$

370. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}dx = -\frac{\pi^2}{8}.$

371. $\displaystyle\int_0^1 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4}.$

372. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\log 2.$

373. $\displaystyle\int_0^1 x^m \log\left(\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}$, si $m+1>0, n+1>0.$

374. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x^p - x^q)dx}{\log x} = \log\left(\frac{p+1}{q+1}\right)$, $[p+1>0, q+1>0].$

375. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\log\left(\frac{1}{x}\right)}} = \sqrt{\pi}.$

376. $\displaystyle\int_0^\infty \log\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) dx = \frac{\pi^2}{4}.$

377. $\displaystyle\int_0^\pi x\cdot\log \operatorname{sen} x dx = -\frac{\pi^2}{2}\log 2.$

378. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x dx = \int_0^{\pi/2} \log \cos x dx = -\frac{\pi}{2}\cdot\log 2.$

379. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} x dx = \log 2 - 1.$

380. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{tg} x dx = 0.$

381. $\displaystyle\int_0^\pi \log(a \pm b\cos x)dx = \pi\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)$, $[a \geq b].$

TABLA B-1. Valores de $\Gamma(n)$

n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
1,01	0,99433	1,26	0,90440	1,51	0,88659	1,76	0,92137
1,02	0,98884	1,27	0,90250	1,52	0,88704	1,77	0,92376
1,03	0,98355	1,28	0,90072	1,53	0,88757	1,78	0,92623
1,04	0,97844	1,29	0,89904	1,54	0,88818	1,79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
1,06	0,96874	1,31	0,89600	1,56	0,88964	1,81	0,93408
1,07	0,96415	1,32	0,89464	1,57	0,89049	1,82	0,93685
1,08	0,95973	1,33	0,89338	1,58	0,89142	1,83	0,93969
1,09	0,95546	1,34	0,89222	1,59	0,89243	1,84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
1,11	0,94739	1,36	0,89018	1,61	0,89468	1,86	0,94869
1,12	0,94359	1,37	0,88931	1,62	0,89592	1,87	0,95184
1,13	0,93993	1,38	0,88854	1,63	0,89724	1,88	0,95507
1,14	0,93642	1,39	0,88785	1,64	0,89864	1,89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
1,16	0,92980	1,41	0,88676	1,66	0,90167	1,91	0,96523
1,17	0,92670	1,42	0,88636	1,67	0,90330	1,92	0,96878
1,18	0,92373	1,43	0,88604	1,68	0,90500	1,93	0,97240
1,19	0,92088	1,44	0,88580	1,69	0,90678	1,94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88565	1,70	0,90864	1,95	0,97988
1,21	0,91558	1,46	0,88560	1,71	0,91057	1,96	0,98374
1,22	0,91311	1,47	0,88563	1,72	0,91258	1,97	0,98768
1,23	0,91075	1,48	0,88575	1,73	0,91466	1,98	0,99171
1,24	0,90852	1,49	0,88595	1,74	0,91683	1,99	0,99581
						2,00	1.00000

Bibliografía

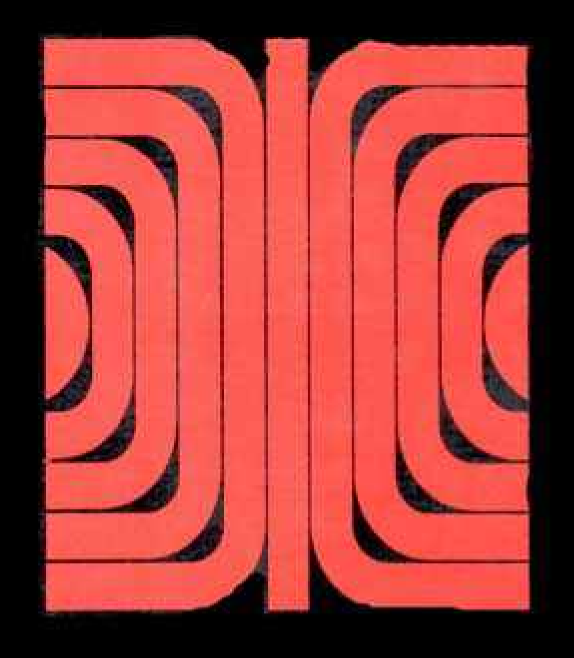
Apostol, M. Tom: *Cálculo*, Vols. I y II. Bleisdel P. Co. Waltham, Massachusetts, 1971.
Bartle, R.; Tulcea, C. I.: *Calculus*. Scott-Foresman & Co. Glenview, Illinois, 1968.
Bell-Blum-Lewis & Rosenblatt: *Introductory Calculus*. Holden Day. Nueva York, 1966.
Britton, J. J.; Kriegh, R.: *Matemáticas Universitarias*. SECSA. México, 1968.
Burrill-Knudsen: *Real Variables*. Holt, Rinehart & Wiston. Nueva York, 1969.
Chover, Joshua: *The Green Book of Calculus*. W. A. Benjamin. Nueva York, 1972.
Combes, A.: *Exercises et Problemes de Mathematiques*. Libraire Vuibert. París, 1969.
Curtis, C. Philip: *Calculus*, Vols. I y II. John Wiley & Sons. Nueva York, 1972.
Demidovich: *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Mir. Moscú.
Flanders-Korthage-Price: *Calculus*. Academic Press. Nueva York, 1970.
Goffman, Casper: *The Calculus*. Harper & Row. Nueva York, 1971.
Gunzburg: *Calculus Problems & Solutions*. Holden Day. Nueva York, 1963.
Haaser, La Salle-Sullivan: *Análisis Matemático*. Editorial Trillas. México, 1970.
Hans, M. E., Gambill, R.: *Calculus*. Holt, Wiston & Rinehart. Nueva York, 1969.
Kaplan, W.; Lewis, D. J.: *Calculus & Linear Algebra*. John Wiley & Sons. Nueva York, 1971.
Kitchen, J. W.: *Calculus of One Variable*. Addison Wesley P. Co. Reading, Massachusetts, 1969.
Kurtz, A.: *Calculus Suplement*. W. A. Benjamin. Nueva York, 1970.
Laboreur, M.: *Calcul Mathematique*. Librairie Polytechnique Beranger. París, 1963.
Leithold, L.: *The Calculus*: Harper & Row. Nueva York, 1972.
Lightstone, A. H.: *Concepts of Calculus*. Harper & Row. Nueva York, 1965.
Munroe: *Calculus*. W. E., Saunders. Filadelfia, 1970.
Olmsted, J. H.: *Calculus with Analytic Geometry*. Appleton Century Crofts. 1966.
Ostrowski: *Differential and Integral Calculus*. Scott Foresman & Co. Glenview, Illinois, 1968.
Pisot, C.; Zamansky, M.: *Matemáticas Generales*. Montaner y Simón. Barcelona, 1966.
Seeley, T. Robert: *Calculus of One Variable*. Scott Foresman. Glenview, Illinois, 1968.
Silverman, R. A.: *Modern Calculus and Analytic Geometry*. The McMillan Co. Nueva York, 1969.
Simon, B. Arthur: *Calculus*: The McMillan Co. Nueva York, 1970.
Stein, S. K.: *Cálculo en las Primeras tres Dimensiones*. McGraw Hill Book, Co. Nueva York, 1972.
Taylor, H. E.; Wade, T. L.: *Cálculo Diferencial e Integral*. Limusa Wiley. México, 1962.
Thomas, G. B.: *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*. Aguilar. Madrid, 1971.

Indice

Colección Harper

Títulos publicados

CONJUNTOS Y ESTRUCTURAS
CALCULO I. Diferencial
CALCULO II. Integral
FISICA I. Conceptos fundamentales y su aplicación
FISICA II. Conceptos fundamentales y su aplicación



06-316989-3